


V
B
J
C
56567 I 56568
I

PP. Bernardinus: Vihner:

PRÆLECTIONES MATHEMATICÆ

Ex

WOLFIANIS ELEMENTIS

ADORNATÆ,

atque sic

Usui AUDITORUM MATHESEOS

ACCOMODATÆ;

Ut quæ ibi prætermissa, vel in alium locum rejecta desiderari poterant à Tyronibus, adjicerentur; Quæ verò vel obscuritatis, vel prolixitatis accusari solebant, dilucidiùs & breviùs exponerentur.

à P. JACOBO NAKCYANOWICZ S. J.

AA. LL. & Philosophiæ Doctore, in Academia & Universitate Vilnensi Publico ac Ordinario Matheseos Professore

TOMUS PRIMUS

Qui commentationem de Methodo Mathematica Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam Planam & Analysim complectitur.

VILNÆ

Typis S. R. M. Academicis

Annô 1761.



Illuſtriſſimo & Excellentiſſimo

DOMINO MICHAELI POCIEY

Præfecto Rohaczevienſi

Zyżmorenſi &c. &c.

QUae mihi cauſam praebuerunt ILLUSTRISSIME PRÆFECTE, *ut Academicas praelectiones Tuo inprimis Nomini inſcriptas vellem, fuerunt grata beneficiorum memoria, avita generis No-*

bilitas cum praeclaris in Rempublicam meritis conjuncta, eximia Tua rerum plurimarum notitia, atqué incredibile in scientias, bonasqué artes omnes studium. Si quam bene es de nobis meritus, pluribus declarare vellem, longior, quam ratio haec scribendi patitur, esse deberem. Res musaei nostri Astronomicae Tua liberalitate amplificatae meritorum erga nos Tuorum magnitudinem satis apertè declarant, nequé sinent unquam, ut ea temporis vetustas aliquando è Mathematicorum animo tollat. Qua verò Nominis claritate inter Principes Regni nostri Familias luceas, nemo est, nisi peregrinus atqué in annalium monumentis omnino hospes, qui id ullo modo ignorare possit. Quare pulcherrima illa Domus POCIEJORUM *omitto Decora, nequé* Clarissimos belli DUCES, *nequé* ILLUSTRISSIMOS PALATINOS, *nequé alios plurimos* pacis belliq; Ministros *commemorabo, vivam eorum in* ALEXANDRO Trocensiū Palatino, LUDOVICO *castrorum*, LEONARDO *vigilum* Magni Ducatûs Lithvaniæ Præfectis,

fectis, *atqué in Te* VIR ILLUSTRISSIME *imaginem intuemur. Et quamvis alius aliter in Republica administranda occupatus sit, id tamen cuiqué semper propositum est, ut cum omnibus utilitati, Reipublicae sine intermissione sit emolumento. Jam singularem illam Tuam erga bonarum artium studia beneficentiam & amorem ecquis maximum in Te semper fuisse non videat? cujus vita omnis, fortuna ac dignitas cum optimis disciplinis earumqué tutela conjuncta fuit. Id non amplissimum modo hoc nostrum* Poloniæ Regnum, *verum etiam nationes exterae, quas inter* Eruditissimæ Galliarum Regiones *primum sibi locum vendicant, testificantur. Ad Te igitur* ILLUSTRISSIME PRÆFECTE VIRUM *& Musis ita amicum, & generis splendore summum, & scientiarum laude adeò insignem disciplinae Mathematicae, quas praecipuo semper loco habes, jure quodam suo omnino pertinere mihi videbantur; quas cum Tuo Illustrissimo Nomine dignas existimas, illud profecto eventurum confirmo, ut, postquam Illustrissimam*

Domum

Domum Tuam maximis auctam dignitatibus celebrari ab hominibus videris, Ipſe in ea Princeps Eruditorum literarum monumentis æternum exorneris. Æquum enim eſt, ut ſumma omnia ad illos perveniant, qui nihil omnino agunt, quod ad communem Reipublicae felicitatem non referant, nec literae eos mori ſinant, quorum beneficiô id acceperunt, ut florerent quotidie magis, nec ulla temporis circumſcriptione terminarentur.

Illuſtriſſimæ
ac Excellentiſſimæ
Dignitatis Tuæ

Obſervantiſſimus cultor
Jacobus Nakcyanowicz
è Societate JESU.

Vilnæ 1761.
Julii 21.



ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.



Erexiguus eſt eorum numerus, qui Geometriæ pretium ſuum ſtatuunt: notione enim deluſi cum Arte

agrimenſoria eam peſſimè confundunt, nec ea animo ipſorum obverſatur idea, quam nomen tam auguſtum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis diſtinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in ſcientiis, quàm in artibus ejus ſit uſus. Equidem ob Problemata, quorum reſolutionem trado, nonniſi ad locorum diſtantias, variorumq; objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumq; molem dimetiendum conducere videtur;contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cùm ad reliquas Matheſeos partes inferius applicabitur. Non hìc repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam ſuperiùs (*a*) dicta ſunt. Ne verò hoc fructu careret Geometriæ ſtudium, à rigore in demonſtrando recedendum minimè fuit. Hinc definio, quæ vulgò definiri non ſolent, & paſſim demonſtro, quæ ſine probatione ab aliis aſſumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic auſus: Sed ſufficit eum proba-

(*a*) *In Comment: de Meth: Mathem.*

probari peritis; & quod majus eſt, methodum noſtram præſtare, ne extra Matheſin ratiocinaturi in ſcopulos incidamus, in quos plerumq; omnes hactenus incidiſſe, ſupra etiam (*b*) annotavimus. EUCLIDES & ejus exemplô hactenus omnes ex principio congruentiæ ſolo demonſtrârunt omnia: ſed cũ ingenioſiſſimus LEIBNITIUS ſimilitudinis notionem mecum communicaret, atq; moneret multum ejus in Geometria eſſe uſum; ego verò meditatus ampliſſimum deprehenderem; ſimilitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo à me facillimè demonſtrata deprehendes, quæ aliàs ex principio congruentiæ nonniſi per ambages demonſtrari ſolent. Nec injucundum arbitror, quòd figurarum conſtructiones inter principia demonſtrandi nunc obtineant locum, quæ aliàs praxi tantùm inſerviebant. Tyrones, definitionibus evolutis, neglecta demonſtratione Problemata ſolvant. Hoc labore perfuncti ex Theorematum hypotheſibus figuras conſtruant

(*b*) *L. Cit.*

ſtruant, & demonſtrationes empiricas ſuperaddant, quarum in ipſa pertractatione ſit mentio. (c) Tandem eo ordine Elementa relegant, quo conſcripta ſunt. Qui verò mentis acie pollent, illamq́, diu poſſunt habere attentam, difficultates non ſentient, etiamſi prima ſtatim vice ad ſingula animum advertant.



(c) *In Scholio Theor: 7. §. 142.*



ELEMENTA GEOMETRIÆ



PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT I.

DE PRINCIPIIS GEOMETRIÆ.

DEFINITIO I.

I.



G*Eometria* est scientia extensorum, quatenus terminata sunt; hoc est linearum, superficierum, & solidorum.

SCHOLION.

2. *Non immeritò ergo* Geometriam TACQUETUS ſcientiam nobiliſſimam, antiquiſſimam, atqué omnis veritatis infallibilem Magiſtram appellat *propterea, quòd ex ſimplicibus compoſita, ex apertis obſcura legitimò ratiocinió eliciat;* ut ita demum admiranda Theoremata ab omni humano ſenſu & cognitione remota incredibili certitudine ac evidentia innoteſcant. *

Quemadmodùm veró Arithmetica (§ 1, *Arithm:*) *ita* Geometria in Theoreticam & Practicam *dividitur. Qui priorem vel utramqué ſimul complectuntur,* Geometræ dicuntur. *Qui autem poſthabita priore, poſteriori ſoli, agris præſertim metiendis dant operam.* Agrimenſores appellantur. *Nec injuriâ quidem; ſicut enim politores lentium veri Optici, ita iſti ſine ſolida theoria veri Geometræ nominandi non ſunt.*

DEFINITIO II.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Nempe *congruentia* eſt coincidentia terminorum.

DEFINITIO III.

4. *Eundem ſitum habere* dicuntur, inter quæ idem extenſum poni poteſt.

DEFINITIO IV.

5. *Punctum* eſt, quod undiqué ſe ipſum termi-

* *In Præfat: ad Elem: Geom:*

terminat; ſeu quod non habet terminos alios à ſe diſtinctos.

C O R O L L A R I U M.

6. Ergo omne punctum alteri cuicunqué congruit (§ 3.); nec ullas habet partes.

S C H O L I O N.

7. *Hinc EUCLIDES* punctum eſt, *inquit*, cujus pars nulla eſt. *Ut ut tale imaginari quidem, non pingere valeamus.* In *praxi autem Geometrica ſummó ſtudió cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus exiſtit.*

D E F I N I T I O V.

8. *Linea omnis: Curva ſcilicet & recta* deſcribitur, ſi punctum ab uno termino A ad alterum B moveatur. Tab: I. Fig: 1.

C O R O L L A R I U M I.

9. Termini igitur lineæ ſecundùm longitudinem ſunt puncta A & B, ſecundùm latitudinem & profunditatem ipſa ſui terminus eſt. (§ 5.)

C O R O L L A R I U M II.

10. Quoniam punctum partes nullas habet, (§ 6.), linea nec lata, nec profunda eſſe poteſt, ſed tantùm longa.

S C H O L I O N.

11. *Quamvis corpus omne tribus dimensionibus præditum sit, nec una à reliquis actu separari possit, necessarium tamen est, ut unam absqué reliquis eg. altitudinem turris absqué latitudine & profunditate consideremus.*

DEFINITIO VI.

Tab: I. Fig: 1. 12. *Distantia* est linea brevissima inter duo E.g. inter A & B si ducatur linea per C.

DEFINITIO VII.

13. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcunqué est toti similis. Describi concipitur, si punctum A ad aliud B *eadem directione* moveatur.

Curva verò AXZB, cujus pars quæcunqué AX toti dissimilis. Describitur, si punctum A ad aliud B *diversa directione* moveatur.

COROLLARIUM.

14. Lineæ igitur rectæ non differunt, nisi quantitate (§. 23. *Arithm:*)

POSTULATUM I.

15. A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.

POSTULATUM II.

16. Lineam rectam terminatam AB utrinqué produci posse.

DEFI-

DEFINITIO VIII.

17. *Metiri* idem eſt, ac quantitatem aliquam pro *unitate* aſſumere, ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere.

Quantitas, quæ pro unitate aſſumitur, *menſura dicitur.*

SCHOLION.

18. *Hæc Definitio latior* praxi reſpondet. *Strictiùs EUCLIDES* menſuram *definit per quantitatem*, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis; *quam in Arithmetica partem aliquotam diximus* §. 25.

DEFINITIO IX.

19. Hinc *menſura linearum* eſt linea recta arbitrariæ longitudinis in partes minores pro libitu dividenda, & ſubdividenda. Dividitur autem à Geometris in 10 partes æquales, quæ pedes vocantur. Unde ipſa *Decempeda* appellatur. Pes ſubdividitur in 10 digitos. *Digitus* in 10 lineas, & ita porro.

SCHOLION I.

20. *Menſuræ longitudo & diviſio non eadem eſt ubivis Gentium.* Chorda (*ſznur*) qua in noſtro Regno utuntur Geometræ, conſtat Ulnis 75 ſive pedibus 150. Pertica (*pręt*) $7\frac{1}{2}$ Ulnis, ſive pedibus 15. *In exteris Regionibus paſſim utuntur Decempeda;*

peda; ſed pes, ex quibus componitur, pro varietate Regnorum diverſus eſt. Aliquas celebrium menſurarum varietates expreſſimus in Arithmetica §. 377. Dividitur verò communi noſtratibus Geometris diviſione, Chorda in 10 perticas, Pertica in 10 alias perticulas (*pręčik*); perticula in 10 lineas (*ławka*) linea in 10 lineolas (*ławeczka*) & ita porro.

SCHOLION II.

21. *Diviſionem menſuræ decimalem primus introduxit SIMON STEVINUS Anglicè oriundus in Academia Exfordienſi Profeſſor circa annum C. 1595. teſte ipſius Geometriâ practicâ exemplô REGIOMONTANI. Menſuræ decimales locò* $\overset{\circ}{5}\,\overset{\prime}{3}\,\overset{\prime\prime}{7}\,\overset{\prime\prime\prime}{8}$ *interdum commodè ſcribuntur* 5. 378. (§ 349 *Arithm:*) *R.P. FRANCISCUS NOEL S. J. Autor eſt diviſionem decimalem non modò in menſuris, ſed & ponderibus Sinicis adhiberi.* (a)

DEFINITIO X.

22. *Superficies* eſt magnitudo duabus dimenſionibus prædita, ſeu in longitudinem & latitudinem extenſa. *Oriri* concipitur, ſi una linea alteri inſiſtens quopiam motu moveatur.

SCHOLION.

23.

(a) *In obſervationibus Mathematico-Phyſicis in India & China factis c. 7. p. 104. & ſequ.*

23. *Definitur in genere ſuperficies, ut conveniat ſuperficiei rectilineæ, curvilineæ, & mixtilineæ.* Si enim lineæ rectæ inſiſtat altera recta, & motu uniformi, ſive *eadem directione* moveatur, naſcetur ſuperficies *rectilinea;* ſi *diverſa directione* moveatur, erit *ſuperficies mixtilinea.* Si curvæ inſiſtat curva, aut recta, *directione tamen diverſa* moveatur, deſcribetur etiam ſuperficies *curvilinea.*

COROLLARIUM.

24. Termini itaque ſuperficiei ſecundùm longitudinem & latitudinem ſunt lineæ, ſecundùm profunditatem ipſamet ſui terminus exiſtit. (§. 13.)

DEFINITIO XI.

25. *Perimeter* eſt continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XII.

26. *Figura* eſt continuum perimetrô terminatum.

SCHOLION.

27. *Dicitur tam de ſuperficiebus, quàm de ſolidis; in priori caſu perimetri ſunt lineæ,* (§. 23.) *in poſteriori ſuperficies.*

DEFINITIO XIII.

28. *Figura rectilinea* eſt, cujus perimeter

ter ex lineis rectis: *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis: *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat. Quomodo oriatur, patet ex §. 23.

DEFINITIO XIV.

29. *Latus Figuræ* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DEFINITIO XV.

30. *Planum*, seu *figura plana* est, si è quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem punctum rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVI.

Tab: I. Fig: 2. 31. *Circulus* est figura plana linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C, (quod centrum vocari solet) ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa, *Peripheria* dicitur. *Chorda* verò, recta AB à peripheria ad peripheriam ducta.

Diameter AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC, sive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

32. Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt: & si fuerint radii æquales, circuli etiam æquales sunt.

DEFI-

DEFINITIO XVII.

33. *Arcus* eſt pars quæcunque peripheriæ AFB. *Gradus* verò eſt pars ejuſdem peripheriæ trecenteſima ſexageſima.

Quilibet gradus in 60 minuta prima, minutum quodlibet primum in 60 ſecunda &c. ſubdividitur. EUCLIDES *arcum* etiam peripheriam vocat.

COROLLARIUM.

34. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur (§. 33.); gradus circuli majoris ſunt majores gradibus circuli minoris.

SCHOLION.

35. *Scrupula graduum ſunt fractiones ſexageſimales (§. 364 Arithm); apicibus notantur ſuis (§. 366. Arithm:) uti decimales ſuis (§. 21.) Eg. Gradus 3, minuta 25, ſecunda 16. ſcribes* $3^{\circ} 25' 16''$. *Ægyptiis ejuſmodi exdiviſio debetur propter facilitandum calculum aſtronomicum. Sed utinam decimalis communi conſenſu exdiviſio introduceretur, quemadmodum apud nonnullos Aſtronomos videre eſt.*

DEFINITIO XVIII.

36. *Circuli concentrici* ſunt, qui idem centrum habent: *Excentrici*, qui centra diverſa. Tab: II. Fig: 33.

DEFI-

DEFINITIO XIX.

Tab: I. Fig: 2. 37. *Segmentum circuli*, eſt pars ipſius AFBA arcu AFB, & chordâ AB comprehenſa. Dicitur *Segmentum majus*, quod ſemicirculô majus eſt, *minus*, quod ſemicirculô minus.

DEFINITIO XX.

Tab: I. Fig: 2. 38. *Sector circuli* eſt pars ejus ACD duobus radiis AC & CD, atqué arcu AD comprehenſa. Si fuerit 4ta pars circuli; dicitur *Quadrans*. Si ſexta; *Sextans* &c.

DEFINITIO XXI.

Tab: I. Fig: 3. 39. *Recta* HI circulum in L *tangit*, ſi ipſi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat.

Tab: I. Fig: 5. Fig: 4. *Circulus* verò circulum *intus tangit*, ſi huic occurrens, totus intra hunc; *extus verò tangit*, ſi eidem occurrens totus extra hunc cadat.

COROLLARIUM I.

Tab: I. Fig: 3. 40. Recta CL ex centro C ad contactum L ducta eſt radius circuli (§. 31.).

COROLLARIUM II.

Tab: I. Fig: 4. 41. Circuli ergo ſe extus tangentes in L diverſa centra G & C habent, adeoqué excentrici ſunt (§. 36.).

DEFI-

DEFINITIO XXII.

42. *Linea AB* lineam CD *secat* in E, si eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam sitas. Tab: I. Fig: 6.

COROLLARIUM I.

43. Si recta MN circulum in o secet, pars ejus oN intra circulum cadit (§. 31.). Tab: I. Fig: 7.

COROLLARIUM II.

44. Si circulus circulum secat, cùm utriusqué peripheria in se redeat (§. 31.) pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadit. Tab: III. Fig: 43.

DEFINITIO XXIII.

45. *Angulus* est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio: lineæ AB & AC dicuntur *Crura*, punctum concursûs A est *vertex anguli.* Tab: I. Fig: 9.

SCHOLION.

46. *Angulus vel literâ unâ A, vertici ejus adscriptâ, vel tribus literis BAC ita, ut vertici adscripta medio loco ponatur, indicatur. Sæpè angulum designat litera minor veluti x eidem inscripta. Utimur verò angulis ad linearum situm determinandum.*

DEFINITIO XXIV.

47. *Angulus ACB insistere* dicitur lineæ AB, Tab: I.

Fig: 1. AB, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXV.

Fig: 9. 48. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A, intra crura ejus AC, & AB quocunque radio descriptus.

SCHOLION.

49. *Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE* (§. 33.) id quod ex ratione arcus ad peripheriam cognoscitur. (§. 106. *Arithm:*) Hoc est si fuerit arcus DE graduum 32, erit etiam angulus x graduum 32.

DEFINITIO XXVI.

Tab: 1. Fig: 10. 50. *Anguli contigui* FGH, & HGJ sunt, quorum idem est vertex G, & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXVII.

Fig: 6. 51. Rectæ lineæ AE & EB in *directum* sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existant.

DEFINITIO XXVIII.

52. *Angulus deinceps positus* AGC dicitur, si unum crus ejus AE, vel CE protendatur in B, vel D.

CO-

COROLLARIUM.

53. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, non tamen è contra (§, 50.)

DEFINITIO XXIX.

54. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est. Tab: I. Fig: 11.

DEFINITIO XXX.

55. *Angulus obliquus AEC* est, cui deinceps positus AED inæqualis. Fig: 6.

Angulus acutus AEC est obliquus minor rectô.

Angulus obtusus AED est obliquus rectô major.

DEFINITIO XXXI.

56. *Anguli verticales o & x sunt*, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED. Fig: 6.

DEFINITIO XXXII.

57. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB à diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, anguli, quos cum ea efficiunt x & y dicuntur *alterni*. Tab: I. Fig: 12.

DEFINITIO XXXIII.

58. Si verò lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B sed ab eadem plaga occurrant; *Anguli*, quos cum ea

efficiunt *u* & *y* item *z* & *y* dicuntur *oppositi;* & quidem *u* dicitur *oppositus externus,* *z* verò *oppositus internus* ipsius *y*.

DEFINITIO XXXIV.

Tab: I. Fig: 13. 59. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atqué BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *angulus in segmento.*

COROLLARIUM.

60. Intercipitur adeò à duabus chordis AB & BD (§. 31. & 45.) atqué arcui AD insistit (§ 47.)

DEFINITIO XXXV.

61. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura verò AC & CD in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

62. Mensura itaqué ejus est arcus AFD. (§ 48.)

DEFINITIO XXXVI.

Tab: I. Fig: 14. 63. *Angulus extra centrum HKI* est, cujus vertex K extra centrum est; crura verò HK & IK in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

64. Insistit ergo arcui HXI. (§. 47.)

DEFI-

DEFINITIO XXXVII.

65. *Angulus contactûs HLM* est, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit. Tab: I. Fig: 3.

DEFINITIO XXXVIII.

66. *Angulus segmenti MLH* vel *MLI* est, quem chorda ML cum tangente HL ad contactum efficit. Tab: I. Fig: 3.

DEFINITIO XXXIX.

67. *Linea perpendicularis* KL aut *normalis* est ad alteram LM, si cum ea angulum rectum efficiat. Tab: I. Fig: 11.

COROLLARIUM.

68. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi æquales sunt, (§. 54.) & è contra, si anguli ad L æquales, erit LK ad NM perpendicularis.

DEFINITIO XL.

69. Linea AB est ad alteram AC *obliqua*, si cum ea efficit angulum obliquum. Tab: I. Fig: 9.

DEFINITIO XLI.

70. Linea OP *parallela* est alteri QR, si ubiqué eandem ab ea distantiam servet. Tab: I. Fig: 12.

71. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO XLII.

Tab: I. Fig: 15. 72. *Lineæ divergentes* ON & QP ſunt, quarum diſtantia continuò fit major; *Convergentes* è contra.

DEFINITIO XLIII.

73. *Opponi* dicuntur, è quorum uno ad alterum perpendicularis duci poteſt.

DEFINITIO XLIV.

74. *Triangulum* eſt figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO XLV.

Tab: I. Fig: 16. 75. *Triangulum æquilaterum ABC* eſt, cujus omnia latera inter ſe æqualia ſunt.

In genere *figura æquilatera* dicitur, cujus latera ſingula inter ſe æqualia.

DEFINITIO XLVI.

Tab: I. Fig: 17. 76. *Triangulum æquicrurum* ſive *Iſoſceles* DEF eſt, quod duo latera æqualia habet.

DEFINITIO XLVII.

Tab: I. Fig: 18. 77. *Triangulum Scalenum* ACB eſt, cujus nullum latus alteri æquale, ſeu cujus ſingula latera ſunt inæqualia.

DEFI-

DEFINITIO XLVIII.

78. *Triangulum rectangulum KLM* est, cujus angulus K rectus est. Tab: I. Fig: 19.

DEFINITIO XLIX.

79. *Triangulum obtusangulum* PNO est, cujus angulus unus N est obtusus. Fig: 20.

DEFINITIO L.

80. *Triangulum obliquangulum* est, cujus singuli anguli sunt obliqui. *Acutangulum*, cujus anguli sunt acuti.

DEFINITIO LI.

81. *Hypothenusa ML* est latus in triangulo rectangulo, angulo recto K oppositum. Tab: I. Fig: 19.

DEFINITIO LII.

82. *Catheti* sunt latera trianguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO LIII.

83. *Figura quadrilatera* est, cujus perimeter ex quatuor lateribus constat. *Rectangula* dicitur, si anguli ejus singuli sint recti: *obliquangula*, si obliqui.

DEFINITIO LIV.

84. *Quadratum ABDC* est figura quadrilatera, æquilatera, rectangula. Tab: II. Fig: 21.

DEFINITIO LV.

Tab: II. Fig: 22. 85. *Rhombus EFHG* eſt figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LVI.

Fig: 23. 86. *Rectangulum* ſive *oblongum MLKI* eſt figura quadrilatera, rectangula, latera oppoſita ML & IK, item IM & LK æqualia habens.

DEFINITIO LVII.

Tab: II. Fig: 24. 87. *Rhomboides* NOPQ eſt figura quadrilatera, obliquangula, latera oppoſita OP & NQ, item ON & PQ æqualia habens.

COROLLARIUM.

88. Cùm in Quadrato, Rhombo, Rhomboide, Rectangulo latera ſint lineæ rectæ, in rectis autem lineis ſola ratio directionis habenda, (§. 13.) ſiquidem latera oppoſita ſunt æqualia, erunt etiam parallela. (§. 71.)

DEFINITIO LVIII.

89. *Parallelogrammum* eſt figura quadrilatera, cujus latera oppoſita ſunt parallela.

COROLLARIUM.

90. Ergo Quadratum, Rhombus, Rectangulum, Rhomboides ſunt parallelogramma. (§. 89.)

DE-

DEFINITIO LIX.

91. *Trapezium RTUS* est figura quadrilatera non parallelogramma. Tab: II. Fig: 25.

Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantùm latera opposita sunt parallela, quæ aliàs *Trapezium parallelarum basium* dici solet. Figura verò cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* ijsdem dicitur.

DEFINITIO LX.

92. *Figura polygona*, seu multilatera *AB CDE* vel ABCDEGA est, cujus perimeter ex pluribus, quàm quatuor lateribus componitur. T. VIII. IX Fig: 105. Fig: 110.

Quodsi latera fuerint quinque, *Pentagonum*, si sex: *Hexagonum*, si septem: *Heptagonum*, si octo *Octogonum &c.* dicitur.

DEFINITIO LXI.

93. *Figura æquiangula* est, cujus singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO LXII.

94. Figura *regularis* est figura æquilatera & æquiangula. Tab: VIII. Fig: 105.

DEFINITIO LXIII.

95. Figura *irregularis* est, quæ non simul æquilatera, & æquiangula. Tab: IX. Fig: 110.

DEFINITIO LXIV.

96. *Figuræ inter se æquilateræ* dicuntur, si singula latera unius fuerint æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXV.

97. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli homologi unius, singulis angulis homologis alterius sint æquales.

DEFINITIO LXVI.

98. Dicuntur verò tam *anguli*, quàm *latera homologa*, si eundem ordinem à primo in utraqué figura servent.

DEFINITIO LXVII.

Tab: II. Fig: 24. 99. *Diagonalis PN* est recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

DEFINITIO LXVIII.

Tab: I. Fig: 19. 100. *Basis figuræ* est perimetri pars ima KL.

COROLLARIUM.

101. Cùm situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem, seu latus figuræ quodlibet pro basi assumere licet.

DEFINITIO LXIX.

Tab: I. Fig: 19. 102. *Vertex figuræ* M est vertex anguli basi KE oppositus.

DEFI-

DEFINITIO LXX.

103. *Altitudo figuræ*, est distantia verticis à basi.

DEFINITIO LXXI.

104. *Figura ABCDE* dicitur circulo *inscripta*, si peripheria per vertices singulorum angulorum ipsius transit, tuncqué *circulus figuræ* dicitur *circumscriptus*. Tab: VIII. Fig: 104.

DEFINITIO LXXII.

105 *Figura abcde* dicitur *circulo circum scripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant; tuncqué *circulus* figuræ dicitur *inscriptus*. Fig: 104.

DEFINITIO LXXIII.

106. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus latus chordæ, perticæ, decempedæ *&c.* æquale, diciturqué *chorda quadrata*, & in perticas, decempedas quadratas, sicut *pes quadratus* in digitos quadratos &c. dividitur.

DEFINITIO LXXIV.

107. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ determinatur alterum, & utrobiqué ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

108. Quæ itaqué *eódem modó determinan-*

tur

tur, in iis coincidunt ea, per quæ à se discerni debent, adeoque similia sunt. (§. 21. *Arith:*)

DEFINITIO LXXV.

Tab: II. Fig: 30. 109. *Libella est* instrumentum, quô invenitur linea horizonti vel parallela vel perpendicularis.



CAPUT II.
DE PROPOSITIONIBUS QUIBUSDAM FUNDAMENTALIBUS.

PROBLEMA I.

110. *A dato puncto A ad datum punctum B lineam rectam ducere.*

RESOLUTIO.

1mo. In Charta.

Tab: II. Fig: 28. Linea recta ducitur juxta regulam EF ad puncta data A & B applicatam, graphio HI, pennâ aut plumbagine.

2do. In ligno vel Saxo.

Recta delineatur etiam sine regula, si filum cretâ, vel cerussâ delibutum punctis datis A &

& B apprimatur, & mediô digitis prehensô ſurſum trahatur, moxqué iterum demittatur.

3tio. In Campo.

Recta deſignatur per baculos in punctis datis beneficio libellæ ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum ſummitati muccinium aut folium chartæ mundæ alligatur, ſi è longinquo videri debeant. Fig: 30.

S C H O L I O N.

111. *Cùm regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facilè nigrent, utendum eſt ebeninis, aut aliis ex lignis indicis. Pennæ optimæ ſunt, quæ ex corvorum alis evelluntur, propterea quod anſerinis duriores, lineis ſubtilioribus & purioribus ducendis inſerviant. Utendum verò atramento Sinico, tum quia commune ob corroſivitatem vitrioli chalybeam graphii cuſpidem arrodit, tum quia Sinicum facilius effluit, & eô lineæ nitidiores ducantur.*

Baculi cuſpide ferrea interdum muniuntur.

P R O B L E M A II.

112. *Duobus baculis in ſolo defixis tertium, vel plures in eadem recta cum iis infigere.*

R E S O L U T I O.

Baculus ita inſigatur, ut oculô in unum directô cæteri non appareant.

Ratio à luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in opticis.

PRO-

PROBLEMA III.

113. *Lineam Rectam metiri.*

RESOLUTIO.

Tab: II. Fig: 31. Aſſumatur aliqua menſura (§. 19.) Nimirum pro lineis rectis *in charta* datis, reſecentur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes, cubitos, aut chordas &c. deſignent; intervallum verò 10 pedum RS in reſiduum lineæ transferatur quoties fieri poteſt. (§. 14.)

Fig: 32. *In Campo* utimur catena vel fune canabino vel perticâ in digitos & lineas diviſâ. Sufficit autem ultimam menſuram componentem integrum in partes minores dividi e g. Chordæ totius unam perticam, in perticulas, in digitos, lineas &c. Quodſi ergo Linea recta metienda AB.

1mo. In Charta.

Tab: II. Fig: 31. 28. Ponatur crus circini unum in A, & eouſqué aperiatur, donec alterum extremum B attingat.

Mox circini crus unum in fine decempedæ aut chordæ alicujus eg: in 10 ponatur, & notetur quemnam pedem menſuræ alterum attingat egr: 6, erit linea AB, $1^{o}\ 6^{\prime}$. (§.21.)

2do. In Campo.

I. In utroqué lineæ extremo erigantur baculi (§. 110.) & ſi ea diſtantia menſuræ longi-

gitudinem ſuperet, conſtituantur cum iis alii in eadem recta. (§. 112.)

II. Chorda aut alia menſura ab uno baculo uſqué ad alterum ita extendatur, ut utrumqué ad angulos rectos ſecet, (§. 54, 42.) id quód perpendiculô appensô indicatur.

III. Chordis perticæ, perticulæ &c. adnumerentur.

SCHOLION I.

114. *Funes cannabinos humor contrahit, & vires diverſæ inæqualiter tendunt. Chordâ itaqué ex filis ferreis utendum. Sed optima omnium menſura, pertica lignea, aut metallica, útpotè ab inæqualitate extenſionis prorſus libera. Quodſi tamen urgente neceſſitate fune utendum, funiculi (ex quibus conficitur) in gyros contrarios contorquendi, ipſe autem funis oleô ad ignem ferventi immittendus, & poſtquàm exſiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemquè cerandus. Ita, ne ab humore longitudinis decrementum patiatur, providebitur.* Tab: II. Fig: 32.

SCHOLION II.

115. *Longitudo verò lineæ in menſura quapiam alia invenitur per regulam trium (§. 387. Arithm:) eg: ſi quæratur: pedes Pariſini 186 quot Londinenſes faciunt?*

PROBLEMA V.

116. *Ex dato quovis centro C dato radio quocunqué AC circulum deſcribere.* Tab: II. Fig: 33.

RESO-

RESOLUTIO.

1mo. In Charta.

I. Collocetur circini crus unum in dato centro C, & aperiatur intervallo radii AC.

II. Moveatur circinus circa centrum C. ita crus alterum peripheriam designabit. (§. 31.)

2do. In solo; & quotiescunqué circini apertura tanta fieri non possit, quanta requiritur, pro radio filum, funiculus, aut virga sive lignea sive ferrea servit.

SCHOLION.

Tab: II. Fig: 34. 117. *Si fune aut filó utimur, cavendum est, ne stylus è situ perpendiculari dimoveatur, id quod impedit filum transversum FE, si fuerit AF = 3. AE = 4, & FE = 5. Ratio patet per Theorema Pythagoricum infra demonstrandum.*

COROLLARIUM I.

Fig: 33. 118. Quoniam unius circuli peripheria eódem modó determinatur, quó peripheria alterius cujuscunqué, (§. 107.) omnes peripheriæ sunt inter se similes (§ 108.). Eodem modo patet omnes circulos & semicirculos quadrantes, sextantes, &c. inter se esse similes.

COROLLARIUM II.

Tab: I. Fig: 2. 119. Quoniam ADE ∽ AFBE, segmentum scilicet segmento, & peripheria peripheriæ (§. 118), peripheriæ ad peripheriam, segmen-

gmenta ad circulum eandem rationem habent (§. 145. *Arith:*); Peripheriæ & ſegmenta ſunt æqualia (§. 152. *Arith:*). *Ergo Diameter dividit tam peripheriam, quàm etiam circulum in duas partes æquales.*

COROLLARIUM III.

120. Super quavis igitur linea recta AE ſemicirculus deſcribi poteſt.

THEOREMA I.

121. *Si ex centro C duorum circulorum concentricorum ducantur radii CDA & CEB, tum arcus DE, & BA ad peripherias, tum ſectores DCE, & ACB ad areas ſuorum circulorum eandem rationem habent.* Tab: II. Fig: 33.

DEMONSTRATIO.

Cum circuli ſint concentrici *per hypoth:* idem centrum C habent (§ 36.) & arcus iſti, atqué ſectores eodem modo determinentur (§ 107.); igitur illi peripheriarum, hi circulorum partes ſimiles ſunt (§ 108.), conſequenter illi ad peripheriam, hi ad circulos eandem rationem habent. (§, 145. *Arith:*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

122. Cùm arcus DE & AB intra crura ejuſdem anguli ACB ex ejus vertice C deſcripti ſint arcus circulorum concentricorum (§. 36.), ad ſuas peripherias eandem rationem habent, conſequenter ſunt inter ſe, ut pe-

peripheriæ (§. 148. *Arith:*) Quoniam itaqué peripheriæ eundem numerum graduum continent, (§. 33.) ipſi quoqué eundem continent.

COROLLARIUM II.

123. Quia anguli quantitas æſtimatur per rationem arcûs ex vertice intra crura deſcripti ad totam peripheriam (§. 49.) perinde eſt, quocunqué radiô arcus iſte deſcribatur. (§. 121.).

COROLLARIUM III.

124. Eadem igitur eſt anguli quantitas ſive crura producantur, ſive minuantur.

THEOREMA II.

Tab: I. Fig: II. 125. *Anguli recti KLM menſura eſt quadrans circuli.*

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N, (§. 16.) erit x = o. (§. 54.) ſed cum ex L ſuper recta NM deſcribi poſſit ſemicirculus (§. 120), angulorum x & o menſuræ AC & CB ſimul ſumptæ æquales ſunt ſemicirculo (§. 48.), ergo unius menſura eſt dimidius ſemicirculus, hoc eſt circuli quadrans. (§. 49, 38.).

COROLLARIUM I.

126. Cùm quadrans circuli 90° æqualis ſit (§. 33.)

(§. 33.) Angulus rectus est 90° (§. 49.).

COROLLARIUM II.

127. Omnes adeò recti sunt inter se æquales (§. 124.), & æqualis recto, rectus est.

COROLLARIUM III.

128. Acutus igitur minor, obtusus major est 90° (§. 55.).

COROLLARIUM IV.

129. Si duo anguli deinceps positi o & E, aut quotcunqué ad idem punctum y super eadem recta CD constituantur, describaturqué semicirculus *dazb* (§. 116.), ejus mensura erunt duo recti (§. 125.). Duo igitur anguli deinceps positi, aut quotcunqué ad idem punctum E super eadem recta CD constituti sunt æquales duobus rectis (§. 85. *Arithm:*). Tab: I. Fig: 6.

COROLLARIUM V.

130. Anguli igitur deinceps aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ positi simul sumpti sunt æquales 180° (§. 126.).

COROLLARIUM VI.

131. Angulorum deinceps positorum datô uno, alter ignorari non potest; relinquitur ni-

mirum, si datus ex 180° subtrahatur.

COROLLARIUM VII.

132. Si in campo angulum inaccessum vel obtusum quadrante metimur, si accedi potest angulus deinceps, illius locô hunc metimur; ex 180° enim subductus quæsitum relinquit. (§. 131.)

COROLLARIUM VIII.

133. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exactè dimensum esse, si finitâ operatione deinceps positos etiam metiaris; quod si enim ubiqué prodierit summa 180°, operatio ritè peracta. (§. 130.)

PROBLEMA VI.

Tab: II. Fig: 26. 134. *Angulum ACB metiri.*

RESOLUTIO.

Cùm anguli ACB mensura sit arcus DE, (§. 48.) totum negotium est, ut numerus graduum arcui DE competens determinetur, id quod fit ope semicirculi in 180° exactissimè divisi. &

1mo. In Charta.

I.

I. Centrum ſemicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri CB admovetur.

II. Gradus in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepti numerantur.

2do. In Campo.

I. Inſtrumentum Goniometricum ita collocatur, ut radius ejus uni cruri anguli, centrum verò vertici ejuſdem immineat, *prius obtinetur* collineando per dioptras, ſeu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas verſus baculum in extremo cruris defixum; *poſterius* verò perpendiculum ad centrum inſtrumenti applicando, aut quod exactius, per ſectionem filarem planorum, inferiùs demonſtrandam. Tab: II. Fig: 29.

II. Regula circa centrum mobilis verſus crus anguli alterum promoveatur, donec per pinnulas ipſi affixas baculus collineanti occurrat.

III. Gradus, quem regula inſtrumento indicat, notetur.

S C H O L I O N I.

135. *Semicirculus minor, quô in charta utimur,* Inſtrumentum transportatorium *vulgò appellatur. In Campo & circulo integro & interdum quadrante utimur. Pro dimidia parte tranſportatorii, ſive pro quadrante diviſio fit juxta decantatum illum verſum:* in tres *(partes)* in binas, in tres, in quinqué ſecato. Tab: II. Fig: 26.

SCHOLION II.

136. *Diameter tranſportatorii eſt trium ferme digitorum Rhenanorum, majorum verò Inſtrumentorum Geometricorum unius pedis, aut ad ſummum unius cum dimidio. Diviſio accurata fieri debet. In tranſportatorio graduum dimidiæ aut quartæ partes ſufficiunt, in majoribus dena prima. Angulos in campo inſtrumento majore captos, quantum fieri poteſt, accuratè in charta deſignaturi diametrum tranſportatoris non multò minorem diametrô ejus inſtrumenti, quô in campo uſi ſunt, aſſumunt.*

SCHOLION III.

Tab. II. Fig. 27. 137. *Propter invenienda minuta prima apponuntur interdum Inſtrumentis Geometricis arcus concentrici mobiles ab, in aliquot partes aliquotas numeri 60 diviſi. Quod inſigne artificium PETRI NONII Luſitani ita habet:*

1mo. Aſſumitur pars aliquota numeri 60. *eg.* 15. tot ſcilicet gradibus reſpondens arcus goniometrici g.15.

2do. Dictis gradibus unus præterea additur, ut ſint 16.

3tio. 16 iſti gradus in arcu concentrico ab in tot partes æquales, in quot arcus g 15. dividuntur.

PROBLEMA VII.

138. *Invenire minuta prima in Goniometricis Nonianis.* RESO-

RESOLUTIO.

I. Arcus mobilis concentricus a b moveatur tamdiu, donec initium partis alicujus (nisi fortuitò incidat) eg. 8. occurrat lineæ dioptricæ xz. Tab: II. Fig: 27.

II. ab 8 usqué ad a, donec lineæ utriusqué arcus in a & g coincidant, numerentur partes in arcu a b.

III. Dividatur 60. per numerum partium arcûs a b; & quotus in nostro casu 4 multiplicetur per a 8.

Dico factum hoc minuta indicare; esse scilicet arcum gz octo graduum, & 32. minutorum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus a b gradu uno, hoc est: minutis 60. (§. 33.) excedit arcum 15.g, partium verò totidem sit uterqué per *constructionem* (§. 137.); si inferatur, uti se habent partes 15. ad 60': ita una d a ad sua minuta, invenietur ea 4' (§. 276 *Arith:*); consequenter cùm ab a ad 8 partes octo ex arcu a b abscindantur per *operationem*, continebunt eæ præter gradus 8, minuta etiam 32 (§. citt:). *Q. e. d.*

vel

Si fuerit arcus concentricus o g mobilis per §. 137 exdivisus, prout communiter in sectoribus dioptris instructis, qui Goniometricis apponuntur, videre est, tum eôdem modô.

I. Numerentur partes omnes in arcu g o, perqué numerum inventum dividantur 6 o, ut innotescat, quot minuta 1ma uni parti debeantur (§. 276 *Arithm.*).

II. Numerentur etiam in arcu eodem o g partes, usqué lineæ utriusqué arcus b a & o g coincidant. Demum

III. Per numerum hunc multiplicentur minuta 1ma inventa uni parti arcûs o g debita.

Demonstratio eadem cum præcedenti. *Difficultas rei ex inspecto sub tempus prælectionum ejusmodi quadrante continuò evanescet.*

PROBLEMA VIII.

139. *Data quantitate anguli ipsum describere.*

RESOLUTIO.

1mo. In charta.

T.I.& II. F.9.& 26 I. Ducatur recta CB.

II. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum instrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat.

III. Numerentur gradus dati ab E versus D, & ad gradum ultimum notetur punctum B.

IV. Ducatur recta CA per C & D; erit ACB angulus quæsitus (§. 124.).

2do. In campo.

Tab. II. Fig. 29. I Collocetur instrumentum Goniometricum per §. 134.

II.

II. Regula circa centrum ad gradum datum promoveatur.

III. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA III.

140. *Si recta AB alteram CD secet in E; anguli verticales x & o item y & E sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Tab: I. Fig: 6.

$$x + y = 180^{\circ}$$
$$y + o = 180^{\circ} \quad (\S.\ 130)$$
Ergo $x + y = y + o$ (§77. *Arith:*)
adeoq; $x = o$ (§81 *Arith:*)

Eodem modo oftenditur effe y = E. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

141. Si ergo inacceffus x metiri debet, accedi autem poteft verticalis o, hunc ejus locô metiri licet.

SCHOLION.

142. *Cùm Tyrones sub initium ftudii Mathematici fenfibus atquè imaginationi nimis adhuc indulgeant, ratiociniis ex affumptis deductis minùs afsveti; figuras per data ex hypothefibus Theorematum affumpta conftruere, ac reliquarum linearum & angulorum per conftructionem determinatorum quantitatem*

explorare (§. 117. 134.) *juvat; ita ſenſus, & veritas propoſitionis eluceſcit, & animus ad demonſtrationes genuinas percipiendas excitatur. Cùm enim ſit ſcire auidus, rationes veritatis noſſe deſiderat. In demonſtratione magis acquieſcunt Tyrones examine ratiociniis legitimè facto, non ſecus ac Theoriæ Phyſicæ magis ſatisfaciunt, ubi experimenta eidem conſona deprehenduntur.*

THEOREMA IV.

Tab. I. Fig. 6. 143. *Omnes anguli x, y, o, E, &c. circa idem punctum aliquod E conſtituti ſunt æquales 4. rectis.*

DEMONSTRATIO.

Deſcribatur ex puncto E vertice communi angulorum intervallo quocunqué Ea circulus (§. 116.); evidens eſt menſuras angulorum omnium ſimul ſumptas ad, db, bz, za, conficere integram circuli peripheriam (§. 48. & 85. *Arithm:*); menſura ergo angulorum x, y, o, E, &c. ſimul ſumptorum eſt integer circulus; ſed circulus eſt menſura quatuor rectorum (§. 125.); Ergo omnes anguli iſti ſunt æquales quatuor rectis (§. 48.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

144. Omnes itaqué anguli circa idem Punctum conſtituti ſimul ſumpti ſunt æquales, 360° (§. 126.).

THEO-

THEOREMA V.

145. *Quæ ſibi mutuò congruunt, ea & æqualia, & ſimilia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Quæ ſibi mutuò congruunt, eorum iidem ſunt termini (§. 5.). Ergo unum in locum alterius ſalva quantitate ſubſtituere licet, conſequenter æqualia ſunt (§. 14. *Arithm:*). *Q. erat unum.*

Porro, quoniam quæ ſibi mutuò congruunt, eoſdem terminos habere debent (§. 3), debent etiam eodem modo determinari, ſunt itaque ſimilia (§. 108.). *Q. er. alterum.*

COROLLARIUM I.

146. Cùm itaqué, ſi concipiamus figuram unam ſuper alteram mutuò ſibi imponi, quivis angulus angulo. & quodlibet latus homologum lateri pariter homologo congruat; *Figurarum quarumcunquè ſibi mutuò congruentium RTUS, & rtus anguli & latera homologa inter ſe æqualia ſunt.* Tab: II. Fig: 36.

COROLLARIUM II.

147. Siquidem anguli ſimiles ſibi mutuò impoſiti congruunt, aliàs, per diverſam inclinationem non eſſent ſimiles, quod cum ſit abſurdum, ut pote contra hypotheſim, *anguli ſimiles ſunt etiam æquales.*

THEOREMA VI.

148.

148. *Quæ æqualia, & similia sunt, ea sibi mutuò congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre non possunt, nisi quantitate (§. 23. *Arithm:*); quare si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 14. *Arith:*).

Jam si mutuò sibi imposita non eosdem terminos haberent, diversitate terminorum differrent; quod cum sit absurdum *per demonstrata*, eosdem terminos habere debent, consequenter sibi mutuò congruunt. (§. 3.) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

149. Lineæ igitur rectæ æquales sibi mutuò congruunt. (§. 14.).

COROLLARIUM II.

150. Si rectarum extrema coincidunt, singula puncta unius erunt in recta altera (§. 148.): atque hinc *inter duo puncta non nisi unica recta cadit.*

COROLLARIUM III.

151. Cùm radii circulorum sint lineæ rectæ (§. 31), ubi æquales fuerint, sibi mutuò congruunt, consequenter etiam peripheriæ, atque adeò ipsi circuli congruere debent (§. cit:). Circuli itaque æquales sunt, quorum æquales sunt radii; minores: si fuerint radii minores. (§. 145. 32,)

CO-

COROLLARIUM IV.

152. Ex uno itaque puncto eôdem radiô circulus non nisi unus describi potest.

THEOREMA VII.

153. *In figuris similibus anguli homologi sunt æquales, & latera homologa proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

In figuris similibus ea coincidunt, per quæ à se invicem discerni debent. (§. 21. *Arith:*) Quare cum figuræ non possint distingvi, nisi per angulos & latera, anguli æquales (§. 147.), latera verò proportionalia esse debent. (§. 131. *Arith:*).

AXIOMA I.

154. *Qualibet quantitas una cum altera comparata, aut æqualis, aut inæqualis deprehenditur; si inæqualis: major vel minor sit, oportet.*

AXIOMA II.

155. *Æqualia sunt, quæ per æqualia determinantur; seu quod perinde est: figuræ æquales sunt, quæ ex æqualibus datis eôdem modô construuntur.*

AXIOMA III.

156. *Similia sunt, quæ per similia determinantur, seu quod in idem redit: figuræ similes*

miles sunt, quæ ex similibus datis simili modo construuntur.

AXIOMA IV.

157. *Similia uni tertio sunt similia inter se; & similibus similia sunt inter se similia.*

AXIOMA V.

158. *Lineæ eidem rectæ parallelæ sunt inter se parallelæ; & parallelis parallelæ sunt inter se parallelæ.*



CAPUT III.
DE LINEARUM RECTARUM & TRIANGULORUM SYMPTOMATIS.

THEOREMA VIII.

Tab: II. Fig: 35. 159. *DUo Triangula ABC & abc sunt æqualia & similia;* atqué adeò angulos reliquos & latera homologa habent æqualia & similia, *si in iis æqualia sint*

Vel I. *Latus unum, & anguli adjacentes* $AB = ab$, $A = a$, $B = b$.

Vel II. *Duo latera & angulo iis comprehenso.*

AB

AB = *ab*, *AC* = *ac*, *A* = *a*.
Vel III. *Omnia tria latera.*

D E M O N S T R A T I O.

Si enim concipiamus unum ſuper alterum imponi, tum ipſa triangula, tum anguli & latera angulis, lateribuſqué homologis congruent (§. 3.); conſequenter tum tota triangula, tum reliqui anguli & latera homologa erunt æqualia & ſimilia (§. 145. 155.). *Q. e. d.*

C O R O L L A R I U M I.

160. Datis itaqué uno latere & duobus angulis adjacentibus, vel duobus lateribus & angulo ab iis comprehenso, vel omnibus tribus lateribus totum triangulum determinatur.

C O R O L L A R I U M II.

161. In eodem, vel æqualibus in ſpecie triangulis latera æqualibus angulis oppoſita ſunt æqualia; *& è contra* anguli æqualibus lateribus oppoſiti ſunt æquales. In omni verò triangulo majori lateri major, minori minor angulus opponitur. & contra (§. 159.).

P R O B L E M A VIII.

162. *Datis duobus lateribus AB & AC cum angulo intercepto A, triangulum conſtruere.*

R E S O L U T I O.

I. Aſſumpto AB pro baſi, in A conſtituatur angulus datus (§. 139.). Tab: II. Fig: 35.

II.

II. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.

III. Tandem ducatur BC.

Erit ABC triangulum desideratum (§. 159.).

SCHOLION.

163. *Tyrones latera & angulos datos in numeris assumant, quod in aliquibus casibus ad demonstrationes distinctiùs percipiendas proderit, quas supra § 142. commendavimus.*

THEOREMA IX.

Tab: III. Fig: 38. 164. *In Triangulo æquicruro DFE: 1mò, Anguli ad basim y & u sunt æquales; 2dò, Recta FG, quæ angulum DFE bifariam secat, basim quoquè DE, & 3tiò triangulum ipsum bifariam secat. 4tò Deniquè FG ad basim DE est perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Nam o = x per *hypoth:* DF = FE (§. 76.) & FG = FG (§. 73. *Arith.*). Ergo *1mo* y = u *2do* DG = GE. *3tio* △ DFG = △ GFE (§. 159.) & quia etiam anguli ad G æquales (§. citt.), *4tò* FG ad DE est perpendicularis (§. 86.) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

165. Cùm Triangulum æquilaterum sit etiam æquicrurum (§. 75, 76,), Theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

THEO-

THEOREMA X.

166. In *Triangulo æquilatero ABC omnes* Tab: I.
anguli ſunt inter ſe æquales. Fig: 16.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim AC = CB (§. 75.) Ergo A = B (§. 161.) eſt verò etiam AC = AB (§. 75.) Ergo C = B (§. 161.) Quare A = C (§. 77. *Arith:*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

167. Triangulum itaqué æquilaterum eſt etiam æquiangulum (§. 93.).

THEOREMA XI.

168. Si *Trianguli ABC latus unum con-* Tab: III.
tinuetur in D, erit angulus externus DAB Fig: 39.
major quólibet internó oppoſitó B, vel C.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB bifariam diviſa in F, & ducatur recta CF, producenda in G (§. 16.) donec fiat FG = FC. Quoniam GC ſecat AB in F, (§. 42.) erit z = y (§. 140.), Conſequenter o = x (§. 159.). Sed DAB > o (§. 75. *Arith:*), ergo & DAB > x (§. 79. *Arith:*). Eôdem modô oſtenditur eſſe DAB, aut quod perinde eſt (§. 140.) ejus verticalem HAC > ACB *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

169.

Tab: III. Fig: 40. 169. *In omni Triangulo ABD, duo latera AD & BD simul sumpta, sunt tertiô AB majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 16.), donec fiat BD = DC, adeoque AC = AD + BD (§. 78. *Arith:*), erit △ BDC æquicrurum (§. 76), & hinc y = C (§. 164.). Cùm vero sit y < x + y (§. 57. *Arith:*), erit etiam C < x + y (§. 79. *Arithm:*). Ergo AC, seu AD + DB > AB (§. 161.). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

Tab: I. Fig: I. 170. *Linea recta AB est brevissima omnium, quæ intra eosdem terminos A & B continentur.*

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ADCEB; ducantur rectæ AC & CB, erit AC + CB > AB (§. 169.). Ducantur etiam rectæ AD & DC. Item CE & EB; erit AD + DC > AC, & CE + EB > CB (§. citt.), consequenter AD + DC + CE + EB > AC + CB (§. 80 *Arithm:*); adeoqué multó magis AD + DC + CE + EB > AB. Quod si plures ducas subtensas, erit earum aggregatum denuo majus ipsâ AB. Quare cum illæ subtensæ cum curva tandem coincidant, erit ea major rectâ AB intra eosdem terminos contenta; hoc est omnium linearum brevissima, quæ ab A usque ad B duci possunt. *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM I.

171. Diſtantia itaqué puncti A à puncto B in plano eſt linea recta (§. 12. 30.). Cùmqué inter duo puncta nonniſi unica linea contineri poſſit (§. 150.), *via in plano breviſſima eſt numero unica.*

COROLLARIUM II.

172. Singula igitur peripheriæ puncta à centro circuli æqualiter diſtant (§. 32.).

THEOREMA XIV.

173. *Si ex punctis extremis C & O rectæ alicujus radiis C P & PO, qui ſimul ſumpti rectâ CO (non nimium tamen) majores ſint, deſcribantur circuli; ii ſe mutuò ſecabunt.* Tab: III. Fig: 43.

DEMONSTRATIO.

Sit C P < CO, erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 18. *Arith:*). Quare ſi ex centro C radio CP circulus PNQP deſcribatur (§. 116.), erit punctum N in peripheria ipſius (§. 172.). Eôdem modô oſtenditur, ſi ex centro O radio OP deſcribatur circulus, fore punctum M in peripheria ipſius. Cùm ergo CN + NO < CP + PO *per hypoth:* & CP = CN (§. 32.); erit NO < PO (§. 82. *Arithm:*). Sed PO = MO (§. 32.). Ergo NO < MO (§. 79. *Arit:*). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP; conſequenter circuli ſe mutuò ſecant (§. 44.). *Q. e. unum.*

 Eodem

Eôdem modô demonſtratur, ſi fuerit CP > CO; vel CP = CO. *Q. e. alterum.*

SCHOLION.

174. *Diximus in Theoremate ſi radii ſimul ſumpti non fuerint nimium majores rectâ; nam ſi eorum unus ſit juſtô major rectâ datâ, poteſt unus circulus alium comprehendere.*

PROBLEMA X.

175. *Super data recta AB triangulum æquilaterum conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab: III. Fig: 37. I. Ex A tanquam centro intervallô ipſius AB deſcribatur arcus y; &

II. Ex B eodem intervallo alius x (§.116), qui priorem in C interſecabit (§.173.).

III. Ducantur rectæ AC & CB.

Erit ACB triangulum æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

AC = AB & BC = AB (§. 32.). Ergo AC = BC (§. 77. *Arith:*). Ergo triangulum ABC æquilaterum (§. 75.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

176. *Data baſi DE, & crure DF, quod illa dimidiâ majus ſit, triangulum æquicrurum conſtruere.*

RESOLUTIO.

I. Ex

I. Ex uno basis extremo D intervallo cruris dati DF describatur arcus, & Tab: I. Fig: 17.

II. Ex altero extremo E eôdem intervallo arcus alius (§. 176.), qui ob DF + EF > DE per *hypoth: & construct:* priorem in F intersecabit (§. 73.).

III. Ducantur rectæ DF & EF (§. 110.).

Dico DFE esse triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF = FE *per construct:* Ergo EDF est triangulum æquicrurum. (§. 76.) *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

177. *Datis tribus lateribus AB, BC, CA, quorum duo simul sumpta AC & BC tertiô AB majora sunt, triangulum construere.*

RESOLUTIO.

I. Assumpta AB pro basi, ex A intervallo ipsius AC describatur arcus y; Tab: III. Fig: 37.

II. Et ex B intervallô ipsius BC arcus alius x (§. 116.), qui ob AC + BC > AB per *hypoth:* priorem in C secabit (§. 178.).

III. Ducantur rectæ AB & BC (§. 110.).

Ita factum est, quod petebatur (§. 159.).

PROBLEMA XIII.

178. *Angulo dato DAE æqualem bac construere.*

RESOLUTIO.

1mo. In Charta.

Tab: III. Fig: 44. I. Ex A intervallo AC deſcribatur arcus BC, erit AB = AC (§. 32.).

II. Ducatur recta ac = AC, & ex a intervallô ipſius AB, deſcribatur arcus x;

III. Item ex C intervallo ipſius CB, alius arcus y; qui priorem in b interſecabit (§. 173.).

IV. Ducatur recta ab. Dico eſſe a = A.

2do. In Terra.

I. Defigatur baculus in C cum A & E, itemqué alius in B cum A & D in eadem recta (§. 112.).

II. In a & c defigantur baculi ita, ut ſit ac = AC.

III. Ad eos funis vel catena ita applicetur, ut ſit pars ipſius ab = AB & altera cb = CB.

IV. In b defigatur baculus.

Dico eſſe bac = BAC.

Interdum in ſolo modo priore utimur.

Tab: II. Fig: 26. 29. Quodſi anguli noti ſunt gradus, in charta tranſportatore (§. 135.), in campo Goniometrico ſæpenumero utimur (§. 134.).

DEMONSTRATIO.

In utroque caſu ac = AC, ab = AB, cb = CB *per conſtr*: Ergo BAC = bac (§. 159.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

179. *Angulum datum HIK in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

I. Ex centro I ducatur radiô quocunque arcus LM (§. 116.). Tab: III. Fig: 45.

II. Ex L & M intervallo dimidiâ LM majore ducantur arcus se mutuò secantes in N (§. 173.).

III. Ducatur recta IN.

Dico esse HIN = NIK.

DEMONSTRATIO.

Est enim IL = IM (§. 32.), LN = MN per *construct*: IN = IN. Ergo HIN = NIK (§. 159, 161).

PROBLEMA XV.

180. *Lineam rectam AB in duas partes æquales dividere; & in medio ejus perpendicularem erigere.*

RESOLUTIO.

1mo. In charta.

I. Ex A & B intervallo dimidia AB majore ducantur arcus se mutuò in C secantes (§. 173). Tab: III. Fig: 46.

II. Fiat similis intersectio infra lineam in D (§. citt.).

III. Ducatur recta DC.

Dico esse AE = EB; & CD ad AB esse perpendicularem.

 DE-

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACB eſt æquicrurum (§.176.), & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§.179.). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E, & ad AB in E perpendicularis eſt (§. 164,). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab: III. Fig: 47. I. Ponatur circinus in A & eouſqué aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D.

II. Intervallum AD transferatur ex B in E.

III. Quô factô, jam facile determinatu eſt punctum medium F.

2do. In Solo.

I. Filum longitudini lineæ AB æquale complicetur, ut punctum medium inveniatur.

II. Hoc punctum aciculâ infixa notetur, & filum lineæ datæ rurſus coextendatur.

III. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum, quod petebatur.

SCHOLION.

181. *Duo modi poſteriores ſecandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur, illorum tamen in praxi uſus eſt inſignis.*

PROBLEMA XVI.

182.

182. *Ex puncto G in recta ML dato perpendicularem GI erigere.*

RESOLUTIO.

1mo. In Charta.

I. Posito circinô in G, arbitrariô intervallô resecentur utrinqué partes æquales GK & GH.

II. Ex punctis K & H intervallô dimidiâ KH majore, fiat interfectio in I. Tab: III. Fig: 48.

III. Ducatur recta GI; quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG = GH, & KI = IH per *constr:* IG = IG. Ergo anguli ad G sunt æquales; (§. 159.); consequenter IG ad ML, perpendicularis (§. 68.). *Q. e. d.*

Aliter.

I. Normæ, hoc est instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat.

II. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 110.); quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ est rectus per *hypoth:* sed ipsi æqualis est IGL (§. 145.), adeoqué IG ad ML perpendicularis (§. 67.).

2do. In Solo.

Normâ utimur majore & juxta crus GI filum extenditur. Aut

Tab: III. Fig: 48. I. Filum KIH in duas partes æquales in I divisum, ex punctis K & H extenditur, &

II. In I baculus defigitur, tandemque

III. KH bifariam dividitur in G (§. 180.)

Dico esse GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

KI = HI & KG = GH per *construct:* & GI = GI. Ergo anguli ad G deinceps positi sunt æquales (§. 159.); consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 68.). *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

183. *Ex puncto D super eadem recta AB unica nonnisi perpendicularis CD erigi potest.*

DEMONSTRATIO.

Tab: III. Fig: 50. Si fieri potest, sit præterea DE ad idem punctum D perpendicularis, quæ intra crura anguli ADC cadat, erit ADE angulus rectus (§. 67.). Et siquidem CD perpendicularis ad AD per *hypoth:* ADC similiter rectus (§.cit:). Ergo ADE = ADC (§. 27.). Quod cum sit absurdum (§.75. *Arith:*); ED ad AB perpendicularis esse nequit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

184. *Hinc mons non plures homines, vites,*
&c.

&c. capit, quam planum, etsi ibi facilius sese explicent (§. 188.).

THEOREMA XVI.

185. *Si recta CD perpendicularis ad DB continuetur in F; erit etiam DF ad AB perpendicularis.* Tab: III. Fig: 50.

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB per *hyp:* angulus x rectus est (§. 67.). Ergo y similiter rectus est (§. 54.); consequenter DF perpendicularis ad DB (§. 67.). *Q. e. d.*

THEOREMA XVII.

186. *Si duo puncta H & q alicujus rectæ HI à duobus punctis K & L alterius rectæ MN utrinqué æqualiter distent; erit HI ad MN perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Siquidem puncta H & q à punctis K & L utrinqué æqualiter distant per *hypoth:*, HK = HL & q K = q L (§. 171.); est verò etiam q H = q H. Ergo o = x (§. 159.); consequenter cum HI = HI, anguli ad I æquales (§. citt:); adeoqué HI ad MN perpendicularis (§. 68.). *Q. e. d.* Tab: III. Fig: 51.

PROBLEMA XVII.

187. *A dato puncto H ad rectam MN perpendicularem HI demittere.* RE-

RESOLUTIO.

1mo. In Charta.

I. Positô circinô in H intervallô arbitrariô, eôdem tamen, intersecetur MN in K & L.

II. Ex K & L fiat intersectio in q (§.173.).

III. Ducatur per q recta HI. Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & Kq = Lq per *constr:*, puncta H & q à punctis K & L æqualiter distant; Ergo HI ad MN perpendicularis. (§. 186.) *Q. e. d.*

Aliter.

Tab: III. Fig: 49. I. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita, ut crus unum eandem stringat, alterum verò punctum datum I attingat.

II. Ducatur recta IG, quæ ad ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ in casu simili data §. 182.

2do. In Solo.

Aut utimur normâ majore, ut in problemate 16, aut

Tab: III. Fig: 51. I. Fune ex H extensô designantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur (§. 112.).

II. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 180.).

Dico

Dico baculos in I & H defixos perpendicularem HI deſignare.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam KH = LH, & KI = LI per *conſtr:* HI = HI, anguli ad I ſunt æquales (59.); adeoqué HI ad MN perpendicularis (§. 68.). *Q. e. d.*

T H E O R E M A XVIII.

188. *Ab uno puncto H ad eandem rectam LM, nonniſi unica perpendicularis HI duci poteſt.* Tab: IV. Fig: 52.

D E M O N S T R A T I O.

Ducatur, ſi poſſibile, adhuc alia HK, erit o rectus (§.67.); ſed quia HI ad LM perpendicularis per *hypoth:*, erit x etiam rectus (§. cit:). Eſt verò o > x (§.168.); adeoqué unus rectus altero rectô major; quod cum ſit abſurdum (§.127.); à puncto H ad KM nonniſi unica perpendicularis duci poteſt. *Q. e. d.*

T H E O R E M A XIX.

189. *In omni Triangulo rectangulo HIK angulus unus x rectus eſt; reliqui H & K ſunt acuti.* Tab: IV. Fig: 52.

D E M O N S T R A T I O.

Angulus y rectus eſt (§. 68.); ſed y > m item y > H (§. 168); Ergo K & H ſunt rectô minores, adeoqué acuti (§. 55.). *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM I.

190. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

191. In Triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa. (§. 81. 161.).

THEOREMA XX.

Tab: I. Fig: 20. 192. *In Triangulo obtusangulo PNO angulus obtusus nonnisi unus est, reliqui P & O sunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

$y + x =$ duobus rectis (§.129.); sed y utpote obtusus per *hypoth:* major rectô (§. 55.). Ergo x rectô minor. Quoniam verò $x > O$ (§.168.), item $x > P$ (§. cit:), erunt O & P multò magis rectô minores, adeoque acuti (§. 55.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

193. In Triangulo obtusangulo, & angulorum maximus est obtusus, & latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 161.).

THEOREMA XXI.

Tab: IV. Fig: 52. 194. *Linea perpendicularis HI est brevissima omnium, quæ à puncto H ad eandem rectam LM duci possunt.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM per *hypoth:* angulus x rectus est (§. 67.), adeoqué HK hypothenusa (§. 81.); consequenter HK > HI (§. 191.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

195. Ergo distantia puncti à linea vel plano est linea recta ab illo puncto ad lineam, vel planum perpendicularis (§. 12.).

COROLLARIUM II.

196. Quare si linea HI fuerit ipsi KL parallela, erunt perpendicula quævis ex illa in hanc demissa GE, AB, CD inter se æqualia, & contra (§. 70.). Tab: IV. Fig: 53.

COROLLARIUM III.

197. Altitudo figuræ est perpendiculum ex vertice in basim demissum (§. 103, 195.).

COROLLARIUM IV.

198. In Triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 79.) & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 67.). Ergo si KL sumatur pro basi, erit M vertex (§. 102.); adeoqué MK altitudo (§. 197.). Tab: I. Fig: 19.

COROLLARIUM V.

199. Similiter in quadrato & oblongo la- Tab: II.
tus Fig: 21. 23.

tus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 84, 86), adeoqué unum ad alterum perpendiculare (§.67.). Quodsi ergo latus unum CD vel IK sumatur pro basi, erit A, vel L vertex (§. 102.), consequenter AC vel KL altitudo. (§. 197.).

THEOREMA XXII.

Tab: IV. Fig: 53. 200. *Si HI fuerit parallela & BA perpendicularis ad KL; erit eadem AB etiam perpendicularis ad HI.*

DEMONSTRATIO.

Fiat EB = BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 182.). Erit GE = CD (§. 196.) & E = D (§.127.); consequenter BG = BC, & y = u (§.159. 161.). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL per *hypoth:* ideo u + x = o + y (§. 68.). Ergo & o = x (§.81. *Arith:*). Quare cum sit etiam AB = AB; erit m = n (§. 159. 161.); adeoqué BA ad HI perpendicularis (§. 68.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

201. Sunt ergo EG, AB, CD distantiæ tum rectæ KL à recta HI, tum rectæ HI à recta KL (§. 159.);adeoqué si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (§.70.).

THEOREMA XXIII.

202.

202. *Si duas parallelas OP & QR secet transversa ST in A & B; erunt 1mo Anguli alterni y & x æquales: 2do Angulus externus u æqualis interno opposito y: 3tio duo interni oppositi z & y sunt æquales duobus rectis.* Tab: I. Fig: 12.

DEMONSTRATIO.

Si recta ST secet parallelas ad angulos rectos, omnia manifesta sunt ex Theoremate 22 § 200. Quodsi secet obliquè. *1mò* Ponamus x minorem esse angulum, quàm y, cùm angulus sit inclinatio duarum linearum, inclinabitur OA ad AB (§. 45.), adeoqué OP cum QR aliquando concurret (§.72.); quod cum sit absurdum (§. 71.); x minor esse nequit angulus, quàm y. Eodem modo ostenditur x majorem esse non posse angulo y. Erit igitur x = y (§.154.). *Q.e.primum: 2dò* x = u (§. 140.), & x = y (*per num: 1,*). Ergo u = y [§. 77. *Arithm:*]. *Q.e. alterum.*

3tiò. u + z = 180° [§. 130.] sed u = y [*per num: 2dum.*]; Ergò y + z = 180° [§. 14. *Arith:*]. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

203. Cùm OP & QR ob angulos x & y æquales convergere non possint *per demonstrata n. 1.* eandem distantiam servabunt [§. 70, 72.]. Jam verò si x = y, erit etiam u = y, & y + z = 180° *per num: 2. & 3.* & contra. Tab: I. Fig: 12.

Igitur

Igitur si duas lineas OP & QR secet transversa ST in A & B ita, ut vel primò x = y vel 2dò u = y; vel 3tiò y + z = 180° erunt lineæ istæ parallelæ [§. 71.].

PROBLEMA XVIII.

Tab: III. Fig: 37. 204. *Datis duobus lateribus AB & BC, cum angulo A uni eorum BC opposito triangulum ABC construere.*

RESOLUTIO.

I. Ductâ rectâ AB in puncto A fiat angulus dato æqualis (§. 178.), factaque AB uni datorum laterum æquali

II. Ex B intervallô alterius lateris dati BC, crus anguli interfecetur in C.

III. Puncta B & C connectantur rectâ.

Sic factum est, quod petebatur (§. 155.).

THEOREMA XXIV.

Tab: IV. Fig: 53. 205. *Perpendicula AB & GE æquales parallelarum partes AG & EB intercipiunt.*

DEMONSTRATIO.

AB = GE (§.196.) s = y (§.202.) & GB = GB; Ergo AG = EB (§. 204. 155.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXV.

Tab: IV. Fig: 56. 206. *Si Trianguli cujuscunque ACB latus unum*

unum BC continuetur in D; erit angulus externus D CA æqualis duobus internis oppositis y & z simul sumptis.

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela, erit x = y & o = z (§. 202.); consequenter DCA = x + o = y + z (§. 78. *Arith:*). *Q.e.d.*

THEOREMA XXVI.

207. *In quovis triangulo ACB tres anguli y, u, z, simul sumpti sunt æquales duobus* Tab: IV. Fig: 56.
rectis, seu 180°.

DEMONSTRATIO.

Nam o + x = y + z (§. 206.). Ergo o + x + u = y + z + u (§. 78. *Arith:*); sed o + x + u = 180° (§.130.). Ergo y + z + u = 180° (§. 77. *Arith:*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM I.

208. In Triangulo igitur rectangulo MKL duo anguli obliqui M & L simul sumpti effi- Tab: I. Fig: 19.
ciunt rectum, seu 90°; adeoque si triangulum fuerit æquicrurum, anguli obliqui semirecti sunt (§. 164.).

COROLLARIUM II.

209. Si unus angulus est obtusus; duo reliqui simul sumpti sunt rectô minores (§.55.).

COROLLARIUM III.

Tab: I. Fig: 16. 210. In Triangulo æquilatero ACB quilibet angulus 60°. Nimirum $180^{\circ}:3 = 60$ (§. 160.).

COROLLARIUM IV.

211. Cùm ergo in Triangulo rectangulo angulus unus neceſſariò ſit rectus (§. 78.) Triangulum rectangulum æquilaterum eſſe non poteſt.

COROLLARIUM V.

212. Si unus trianguli angulus ex 180° ſubtrahitur, ſumma duorum reliquorum relinquitur, & ſi ſumma duorum ex 180° auferatur, reſiduus angulus ſit tertius.

COROLLARIUM VI.

213. Si duo anguli unius Trianguli æquales ſint duobus alterius, ſive ſeorſim, ſive ſimul ſumptis; etiam tertius unius æqualis eſt tertio alterius (§. 81. *Arithm:*).

COROLLARIUM VII.

214. In quovis triangulo duo anguli ſimul ſumpti ſunt duobus rectis minores.

COROLLARIUM VIII.

215. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad basim y & u æquales sunt (§.164.), si angulus ad verticem F subtrahatur ex 180°, & residuum bissecetur; unus angulorum æqualium y, vel u prodit. Similiter si duplum anguli unius ad basim y à 180° subducatur, angulus ad verticem F relinquitur. Tab: I Fig: 17.

PROBLEMA XIX.

216. *In extremitate E lineæ EG perpendicularem EH erigere.* Tab: IV. Fig: 57.

RESOLUTIO.

I. Super EG construatur △ æquilaterum EIG (§. 175.).

II. Producatur GI in H, donec fiat HI = GI.

III. Ducatur recta HE, quæ erit ad EG perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam △ EIG est æquilaterum *per construct:*; $o = 60^{\circ}$, & $u = 60^{\circ}$ (§. 210.). Ergo $y = 120^{\circ}$ (§. 206.); consequenter ob EI = HI per *constr:* erit $x = 30^{\circ}$ (§.215.). Cùm ergò sit $x + o = 90^{\circ}$ (§. 85. *Arith:*),

 angu-

angulus ad E rectus (§. 126.); consequenter HE ad GE perpendicularis (§. 67.). *Q.e.d.*

THEOREMA XXVII.

Tab: IV. Fig: 53. 217. *Si duæ lineæ EG & AB fuerint perpendiculares ad eandem tertiam HI; erunt inter se parallelæ.*

DEMONSTRATIO.

Fiat AB = EG, ducaturque recta KL, erit HI ipsi KL parallela (§. 70.); consequenter EB = GA (§. 205.); Quare cùm etiam sit GB = GB; erit EGB = ABG (§. 159.). Ergo EG ipsi AB parallela (§. 203.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab: IV. Fig: 58. 218. *Parallelæ DF & GA inter easdem parallelas FA & DG sunt æquales; & contra: si DF & GA fuerint parallelæ & æquales; erit etiam FA ipsi DG parallela & æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta AD (§. 110.), erit x = y & o = u (§. 202.). Quare cum AD = AD, erit DF = GA (§. 159.). *Q. e. unum.*

DF = GA *per hypoth:*&, cum eædem lineæ sint parallelæ *per hypoth:*, o = u (§. 202.): quare cùm etiam sit DA = DA, erit x = y (§. 159.); consequenter FA ipsi DG parallela (§. 203.); adeoqué etiam æqualis per numerum 1. *Q. e. alterum, atqué tertium.*

PRO-

PROBLEMA XX.

219. *Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere.* Tab: IV. Fig: 59.

RESOLUTIO.

1mo. In charta.

I. Ex V. demittatur perpendicularis VK (§. 187.).

II. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA = KV (§. 182.).

III. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipsi RS parallela (§. 196.).

Aliter.

I. Regula ad rectam RS applicetur, & circinus intervallô VK aperiatur.

II. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R versus S promoveatur.

Ita crus alterum per V parallelam ipsi RS describet.

Aliter.

I. Per datum punctum V ducatur utcunqué recta RG.

II. In V fiat o = x (§. 178.).

Erit VN, seu MN parallela ipsi RS (§. 203.).

Aliter.

De parallelis ducendis per triangulum rectangulum & *parallelismum* sub tempus prælectionum docebitur. E3 *2do.*

2do. In campo.

Tab: IV. Fig: 59. Commodè utimur modô primô antecedentium.

vel

I. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 112.).

II. Ad V fiat o = x (. 178.). Erit MV, quae facilè produci potest in N (§. 112.), ipsi RS parallela (§. 203.).

Aliter.

Tab: IV. Fig: 60. I. In punctis K & T defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 112.).

II. Fiat u = x (§. 178.) & TA = VK.

III. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 112.). Erit MN parallela ipsi RS.

DEMONSTRATIO.

Quoniam x = u per *constr:*, erit TA parallela ipsi KV (§. 203.); consequenter z = y (§. 202.). Est verò etiam TA = KV *per constr:* & TV = TV. Ergo m = n (§. 159.); consequenter MN parallela ipsi RS. (§. 203.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXI.

Tab: III. Fig: 37. 220. *Datis recta AB & angulis adjacentibus*

tibus

tibus A & B, qui simul sumptis duobus rectis minores sunt, triangulum ABC describere.

RESOLUTIO.

I. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 139.).

II. AC & BC continuentur, donec sibi mutuò occurrant in C; erit ABC triangulum desideratum (§. 159, 155.).

THEOREMA XXIX.

221. *Si in triangulo ABC recta DE alicui lateri BC parallela ducatur, segmenta crurum & ipsis cruribus & sibi proportionalia sunt: hoc est AB: AD = AC: AE, & AB: AC = AD: AE.* Item BD: AD = EC: AE. Tab: IV. Fig: 54.

DEMONSTRATIO.

Ponamus lineam latera secantem DE primùm in vertice A positam inde servatô situ ad basim parallelô descendere; igitur quocunqué loco intermedio *eg.* in DE hæreat, similes utriusqué lateris partes AD & AE abscindet, siquidem latera illa considerantur tanquam via, per quam linea DE ad basim BC tendit, & quemadmodum ob situm parallelum puncta ejus extrema simul utramqué basim debent attingere, ita etiam consistens loco quodam intermedio utrinqué similes viæ illius partes emetitur, nèmpe cum unius lateris dimidium pertransiit, etiam alterius lateris dimidium emensa est; id quod de quavis alia proportio-

ne verum. Erit proinde AB: AD = AC: AE (§. 145. *Arith:*): *vel* AB: AC = AD: AE (§. 148. *Arithm:*). *Q. e. primum.*

Quoniam AB: AD = AC: AE *per demonstr:* Erit etiam AB — AD: AD = AC — AE: AE (§. 168. *Arithm:*); hoc est BD: AD = EC: AE. *Q. e. alterum.*

COROLLARIUM.

Tab: IV. Fig: 54. 222. Quodsi plures etiam ducantur basi parallelæ ab & cd: cùm sit FG: FH = aF: bF = aG: bH, & cF: dF = cG: dH; itemque cF: dF = ac: bd (§. 221.), erit cG: dH = ac: bd (§. 141. *Arithm.*): vel cG: ac = dH: bd (§. 148. *Arithm:*); segmenta crurum, & cruribus, & sibi proportionalia esse patet.

THEOREMA XXX.

Tab: IV. Fig: 62. 223. *Recta FH angulum GFE bifariam secans; basim GE cruribus EF & GF proportionaliter secat; hoc est: EF: EH = GF: GH.*

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I, donec fiat FI = FG, erit o + x = y + u (§. 206.); sed o = x *per hyp:* & y = u (§. 164.), adeoque 2y = 2o (§. 14. *Arithm:*). Ergo o = y (§. 84. *Arithm:*; consequenter HF ipsi GI parallela (§. 203.). Quare EF: EH = FI: GH (§. 221.) = GF: GH (§. 142. *Arith:*). *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM.

224. Eſt ergo & EF: GF = EH: GH (§. 148. *Arith:*); conſequenter EF + FG: EF = GE: EH (§. 165. *Arithm:*), ſeu EF + FG: GE = EF: EH (§. 148. *Arith:*) *hoc eſt: ut ſumma crurum ad baſim integram, ita crus unum ad ſegmentum hujus adjacens.*

PROBLEMA XXII.

225. *Datis tribus lineis AB, AC, & BD invenire quartam proportionalem.* Tab: IV. Fig: 63.

RESOLUTIO.

I. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
II. Ex A in B transferatur linearum datarum prima, ex A in C altera, ex B in D tertia.
III. Ducatur recta BC.
IV. In D fiat angulus x = o (§. 178.).
Dico eſſe AB: AC = BD: CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam o = x *per conſtr:;* erit BC ipſi DE parallela (§. 203.). Ergo AB: AC = BD: CE (§. 221.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

226. Quodſi duabus lineis AB & AC datis, tertia ſit invenienda; ponatur AC bis; ſemel ut prius, & *2do* loco BD; erit nimirum AB: AC = AC: CE. CO-

COROLLARIUM II.

Tab: IV. Fig: 63. 227. Si DB sumatur pro unitate, erit AB: AC = 1: CE (§. 225.): vel AC: AB = CE: 1. (§.144. *Arit:*); respondebit igitur CE exponenti rationis CA: AB (§.114,118. *Arit:*).

THEOREMA XXXI.

228. *Si in duobus triangulis ABC & abc vel duo anguli, vel omnes tres fuerint æquales; triangula sunt similia.*

DEMONSTRATIO.

Tab: IV. Fig: 55. Ponatur parvum triangulum æquiangulum abc in vertice majoris; latera lateribus & angulus angulo, siquidem a = A, congruent (§. 45.). Quoniam verò Abc = ABC, & Acb = ACB *per hypoth:*, erit bc parallela ipsi BC (§. 203.); consequenter AB: Ab = AC: Ac. (§. 221.). Eôdem modô si angulus c minoris ponatur in majoris △li angulo C, erit AB parallela ipsi bc, atque eadem lege inferetur bC: BC = Cc: AC *per demonstrata.* Cùm verò ab = Ab & ac = Ac; Item bC = bc, Cc = ac (§.73. *Ar:*) erit AB: ab = AC: ac, & bc: BC = ac: AC (§. 142. *Arithm:*). Omnia igitur latera homologa proportionalia, atqué adeò cùm anguli quoqué sunt æquales *per hypoth:* triangula æquiangula ABC & abc sunt similia (§.153.). *Q. e. unum.*

Siquidem A = a, & B = b, *per hypoth:* erit etiam C = c (§. 213.), adeoqué △△ ABC & abc æquiangula (§.97.); consequen-

ter

ter *per demonstrata.* Similia. *Q. e. alterum.*

COROLLARIUM.

229. Quodsi ergo lateri △ alicui ducatur parallela DE, cùm sit x = y & o = u (§. 203.), B verò utriqué triangulo communis; △△ ACB & DBE similia sunt (§. 228.), atqué adeo latera homologa proportionalia habent (§. 153.). Tab: IV. Fig: 61.

THEOREMA XXXII.

230. *Duo triangula similia sunt, ac proinde latera homologa proportionalia habent: si vel 1mò lateri alicui trianguli ducatur parallela: vel 2dò tres anguli, vel 3tiò duo anguli, vel 4tò tria latera, aut denique 5tò duo latera cum angulo intercepto eôdem modô determinentur in uno, quo & in altero triangulo.*

DEMONSTRATIO.

Tertium, secundum & primum, scilicet △△ ejusmodi fore similia patet per §§. præcedentes. Reliqua duo eôdem modô, quo æqualitas △△ (§. 159.) evincitur. Datis enim iis in duobus triangulis, impossibile est, ut non reliqua etiam eôdem modô determinentur, si triangula construi debeant. Si itaqué construantur, tam anguli, quàm latera ex similibus datis simili modo construentur. Erunt itaqué similia triangula; si vel 1mò tres anguli: vel 2dò tria latera &c. eôdem modô determinentur in uno, quo & in altero triangulo (§. 156.). *Q. e. primum.* Quod

Quod eſt verò alterum patet per §. 153.

PROBLEMA XXIII.

Tab: IV. Fig: 64. 231. *Datam rectam AB in quotcunqué partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

I. Ex recta CD pro arbitrio aſſumpta, reſecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, e. gr. 5.

II. Super harum partium intervallo conſtruatur triangulum æquilaterum CED. (§. 175.).

III. Ex E in a, itidemqué ex E in b transferatur recta AB.

IV. Ducatur recta ab; ducantur etiam rectæ aliæ ex E in 1, 2, 3 &c.

Dico *1mò* eſſe ab $=$ AB, & *2dò* a1 $= \frac{1}{5}$ AB, a2 $= \frac{2}{5}$ AB; a3 $= \frac{3}{5}$ AB &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Ea $=$ Eb, & EC $=$ ED, angulus etiam utriqué triangulo communis *per conſtr:;* erit EC: CD $=$ Ea: ab (§. 230.), ſed EC $=$ CD *per conſtr.* Ergo etiam Ea $=$ ab $=$ AB (§. 126. *Arithm:*). Q. *e. primum.*

o $=$ x & b $=$ D *per demonſtrata*, & per §. 153. Ergo ab ipſi CD, & a1 ipſi C1 parallela (§.203); conſequenter EC: C1 $=$ Ea:

Ea: a1 (§. 230.): sed C1 $= \frac{1}{5}$ EC $= \frac{1}{5}$ CD *per construṫ.;* ergo etiam a1 $= \frac{1}{5}$ Ea $= \frac{1}{5}$ AB (§.126. *Arith:*). *Q. e. alter.*

Eôdem modô oſtenditur eſſe a2 $= \frac{2}{5}$ AB, & ita porro.

COROLLARIUM I.

232. Quodſi ergo CD fuerit utcunqué di- Tab: IV. Fig: 65.
viſa in 1, 2, eôdem modô recta ab ſecabitur in eadem ratione. Eſt nempe CD: c1 = ab: a1, & CD: c2 = ab: a2 &c. (§. 142. *Arithm:*).

COROLLARIUM II.

233. Quodſi etiam in Parallelogrammo A Tab: IV. Fig: 66.
BCD latus AC in partes æquales, aut juxta datam rationem dividas, perqué puncta diviſionum parallelas ducas: recta AP applicata in partes deſideratas dividetur. Eſt enim Ab: AH = A1: AP (§.221.). Sed Ab $= \frac{1}{4}$ AH; conſequenter A1 $= \frac{1}{4}$ AP (§.128. *Arit:*).

SCHOLION.

234. *Corollariorum horum usus est amplissimus in architectura tam civili, quàm militari, præsertim ubi Ichnographiæ vel ampliandæ vel contrahendæ.*

PROBLEMA XXIV.

Tab: IV. Fig: 67. 235. *Scalam Geometricam construere.*

RESOLUTIO.

I. Ducatur recta AF, & in eam transferantur partes 10. æquales, B1 = 12 = 23 &c. intervallum verò 10 partium AB, ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit, transferatur.

II. In A erigatur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis in partes 10. æquales divisa.

III. Per puncta divisionum 1, 2, 3, 4. &c. ducantur parallelæ cùm AF (§. 219.).

IV. In ultimam CD transferantur partes 10. partibus ipsius AB æquales.

V. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis transversis connectantur.

Dico si AB fuerit chorda; fore B1, 12, 23 &c. perticas; 99 pedem unum; 88 pedes duos, 77 tres &c.

DEMONSTRATIO.

$$B1 = 12 = 23 \ \&c = \frac{1}{10} AB$$

per constr:. Sed pertica est chordæ pars decima (§. 19, 20.). Ergo cùm AB sit chorda

da *per hypot:*, erunt B1, 12, 230 &c. perticæ. *Q. e. unum.*

Porro quia 99 eſt parallela ipſi A9 *per conſtr:*, C9 : CA = 99: A9 (§. 229.). Sed $C9 = \frac{1}{10}$ CA *per conſtr:* Ergo $99 = \frac{1}{10}$ A9 (§. 128. *Arithm:*). Quare cum A9 ſit pertica per *demonſtr:*, erit 99 pes (§. 19.). Eôdem modô oſtenditur eſſe 88 duos, 77 tres digitos. *Q. e. alterum.*

S C H O L I O N.

236. *Quemadmodum hic linea A9 exigua in 10 partes æquales dividitur, ita eadem in quotcunquè alias, in tot ſcilicet, quot partium erit AC, eôdem modô dividi poteſt. Nequè opus eſt, ut angulus A ſit rectus, ſed idem obliquus eſſe poteſt.*

C O R O L L A R I U M.

237. Quodſi ergo circini crus unum collocetur in I, & alterum in K, erit intervallum IK = $1^{\circ}, 4' 5''$ = 1. 45 & ita porro.

P R O B L E M A XXV.

238. *Metiri diſtantiam duorum locorum A & B ex eodem tertio C acceſſorum.*

R E S O L U T I O.

I. In locô C ad arbitrium electo defigatur baculus. Tab: III. Fig: 41.

II.

II. Linea AC transferatur ope catenæ ex C in a, ita, ut baculus in a defigendus ſit cum C & A in eadem recta (§. 112.).

III. Eadem ratione ex C in b transferatur linea CB.

IV. Inveſtigetur longitudo rectæ ab (§. 113.).

Dico ab eſſe æqualem diſtantiæ quæſitæ.

DEMONSTRATIO.

Cùm loca A & B punctorum inſtar in eodem plano ſitorum conſiderentur, eorum diſtantia eſt recta AB (§. 171.). Quoniam verò Aa & Bb ſunt lineæ rectæ *per conſtr:* & ſe mutuo ſecant in C (§. 42.),

erit x = y (§. 140.).

Præterea ac = CA (*per conſtr:*
bc = CB (

Ergo ba = AB (§. 159.).

Aliter.

I. Collocatô inſtrumentô goniometricô in C inveſtigetur quantitas anguli x (§. 134.).

II. Quæratur tandem longitudo rectarum AC & BC (§. 113.).

Fig: 41. III. Ex datis cruribus AC & BC cum angulo intercepto x conſtruatur juxta ſcalam Geometricam (§. 237.) triangulum abc (§. 162.).

IV. Inveniatur in eadem menſura ſcalæ longitudo baſis ab (§. 237.).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in ea menſura, qua in campo uſus es.

DE-

DEMONSTRATIO.

Eſt enim angulus acb = ACB & ac: cb = AC: CB *per conſtr:;* conſequenter cb: ab = CB: AB (§. 230.), ergo iidem numeri, qui reſpondent rectis cb & ab in menſura modica, rectis etiam CB & AB in majore reſpondent (§. 132. *Arithm:*). *Q. e. d.*

Aliter.

I. In menſula Geometrica horizontaliter collocata aſſumatur punctum c, & in eo acicula defigatur, ad quam — Tab: III. Fig: 42.

II. Applicata regula cum dioptris tamdiu huc illucque moveatur, donec per eas trans icienti punctum B occurrat. Ducaturque in hoc regulæ ſitu recta cb.

III. Similis collineatio fiat in punctum A, ducaturque ca.

IV. Inquiratur longitudo rectarum cA & cB (§. 113.), &

V. Ex ſcala Geometrica transferantur lineæ iſtis proportionales ex c in a & b (§. 237.).

VI. Tandem in eadem menſura inveniatur longitudo ipſius ab (§. cit.).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in menſura majore; qua in campo utimur.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cùm proximè præcedenti.

SCHOLION I.

Tab: III. Fig: 41. 239. *Quodſi anguſtiæ ſpatii non permittant, ut integræ AC & BC in a & b transferantur, poterunt ac & bc fieri* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ *&c ipſarum AC & BC; quo in caſu eodem modo quo in reſolutione 2da demonſtrabitur eſſe ab* $= \frac{1}{2}$ *vel* $\frac{1}{3}$ *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipſius AB.*

SCHOLION II.

240. *Notent Tyrones artificium, quô demonſtrationes Geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, ſed & ipſas quoque invenire poſſint. Nimirum quidquid vel ex conſtructione problematis, aut hypotheſi theorematis, vel ex conſpectu figuræ theſim ſimul & hypotheſim exhibentis, diſtinctè cognoſcitur, per characteres diſtinctè exprimatur; veluti in demonſtratione prima præſenti quod X = y, aC = AC & bC = BC. Quo factô diſpiciatur, cujuſnam theorematum antecedentium hypotheſis in iis contineatur, theſis enim illius theorematis oſtendit, quid ex iis conſequatur, veluti in noſtro exemplo quod ab ſit = AB. Cùm verò maxima pars demonſtrationum ex paucis de congruentia & ſimilitudine triangulorum theorematis habeatur, eorundem recordatio familiaris evadat, eſt neceſſe.*

PROBLEMA XXVI.

241. *Invenire distantiam duorum locorum AB, quorum unus B tantùm accedi potest.* Tab: V. Fig: 68.

R E S O L U T I O.

I. Baculo ad arbitrium in E defixo recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus sit cum B & E in eadem recta (§. 112.).

II. In C fiat angulus ECF ipsi B æqualis (§. 178.).

III. Tandem ex C progrediatur versus D, donec baculus in D defixus sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 112.).

Dico esse DC = AB.

D E M O N S T R A T I O.

BE = EC, o = x *per constr:* & y = u (§. 140.). Ergo AB = DC (§. 159.). *Q. e. d.*

Aliter.

I. Defigatur baculus in I cùm B & A in eadem recta (§. 112.), itidemque alius utcunque in K. Tab: V. Fig: 69.

II. Ex K in L transferatur IK, in M verò KB.

III. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus sit cùm M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 112.).

Dico esse MN = BA.

D E M O N S T R A T I O.

BK = KM, & IK = KL *per construct:* o = u (§. 140.), Ergo IB = ML & y = x (§. 159.). Quare cùm sit o + m = u + n (§. 140.); erit IA = NL (§. 159.);

consequenter AB = NM (§. 81. *Arith:*). *Q.e.d.*

Aliter.

Tab: V. Fig: 70. I. Designantur baculi BC, DE, EF ad perpendiculum, ita ut sit BC = EF & A in eadem linea horizontali, ac etiam sit BD = DE.

II. BC ex una, & ex altera parte EF ita infigatur, ut prospiciens ex O per E & C terminum inaccessum A pertingere possit.

III Prospiciatur demum per E & C in A, tum conversim per E & F in G.

Dico esse DA = DG.

DEMONSTRATIO.

Cùm triangula DAE & DEG sint rectangula *per construct:*, erunt anguli ad D æquales (§. 127.), & siquidem BC = EF & in eadem horizontali & distantia ab ipsa D *per constr.*; EA & EG æqualiter inclinantur ad DE; consequenter angulus DEG = DEA (§. 45.); præterea DE = DE. Ergo DA = DG (§. 159.). *Q.e.d.*

Quodsi ergo BD subtrahatur ex DA residuum erit = AB hoc est: EG = AB (§. 81. *Arithm:*).

SCHOLION.

242. *Theodolido perfecto res accuratè determinatur. In mensula etiam Prætoriana utpotè versatili negotium conficitur per quascunqué duas altitudines inæquales; vicem tamen*

men horum Galerus, imò Spithama interdum non inutiliter obit.

Quodsi duo parallelepipeda non admodùm crassa jungantur ad angulum rectum, dioptrisqué instruantur (cujusmodi instrumentum crux Geometrica *appellatur), distantias atqué altitudines etiam metiri licet.* Si enim ponatur crucis hujus altitudo BC in BC perpendiculariter ad horizontem, pars altera LN tamdiu attollitur vel deprimitur, donec L in eadem recta sit cum A & C. Tandem siquidem anguli LIC & ABC sunt recti *per construct:* LI est parallela ipsi AB (§. 203.); proinde invenitur AB per §. 230. inferendo CI: IL = CB: BA. Tab: V. Fig: 70.

Aliter.

243. I. Mensulâ Geometrica in C collocatâ, per dioptras collineetur in A & B; ducanturqué rectæ ac & cb. Tab: V. Fig: 71.

II. Quæratur distantia stationis à loco accesso AC (§. 113.), &

III. Ex scala Geometrica in ac transferatur (§. 237.).

IV. Transferatur mensula in A, ita ut punctum a ipsi A immineat, & per dioptras regulæ ad ac applicatæ baculus in ima statione C defixus conspiciatur.

V. Mox collineatio in B fiat; ducaturqué ab.

VI. Deniqué in scala Geometrica sumatur intervallum ipsius ab (§. cit.).

Ita distantia quæsita AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam c $=$ C, & a $=$ A *per constr:* erit ac: ab $=$ AC: AB (§. 230.); hoc est: i- dem numerus in scala respondet ipsi ab, qui in solo ipsi AB (§. 126. *Arith:*). *Q. e. d.*

Aliter.

I. Ope Goniometrici seu Astrolabii investi- getur quantitas angulorum A & C (§. 134.) itemque longitudo ipsius AC (§. 113.).

II. Ope instrumenti transportatorii & sca- læ Geometricæ construatur triangulum acb (§. 220.).

III. Ad scalam Geometricam applicetur re- cta ab (§. 237.).

Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cùm proximè præcedenti.

PROBLEMA XXVII.

Tab: V. Fig: 68. 244. *Metiri distantiam duorum locorum in- accessorum AB.*

RESOLUTIO.

Sine instrumentis tædiosior est problema- tis resolutio, quàm ut commendari possit. Cui tamen animus fuerit, is

I. Statione in E assumpta rectas BE & AE inveniat. (§. 241.).

II. His datis reperiet DC ipsi BA æqualem (§. 238.).

Aliter.

Aliter.

I. Duabus ſtationibus in C & D electis, in prima C collocetur menſula,& per dioptras collineetur in D, B, & A, ducanturqué juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ cd, cb, ca. Tab: V. Fig: 72.

II. Quæratur diſtantia ſtationum CD (§. 113.).

III. Et ex ſcala Geometrica transferatur in C (§. 237.).

IV. Baculo in C defixo menſula collocetur in D, ea lege, ut punctum d ipſi D immineat, hoc eſt: puncto,in quo defigebatur ante baculus; tum per dioptras regulæ ad cd applicatæ reſpiciatur ad baculum in C.

V. Hinc porro collineatio fiat in A & B, ducanturqué rectæ da, & db.

VI. Tandem diſtantia punctorum a & b inveſtigetur in ſcala Geometrica (§. cit.).

Dico eſſe cd: ab = CD: AB.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim angulus d = BDC, & angulus c = ACD, præterea ac, cd, db eôdem modô determinata, quô & ipſa AC, CD, & DB *per conſtr:*. Quodſi ergo acdb claudatur recta ab; quin eôdem modô determinentur anguli a & b, quô & ipſi A & B, ac etiam recta ab, quo & ipſa AB, dubitari nequit (§. 107.); conſequenter acdb ∽ ACDB (§. 108. & 156.). Ergo cd: ab = CD: AB (§. 153.). *Q.e. d.*

Aliter.

Tab: V. Fig: 73. I. Electis duabus ſtationibus C & D, inveſtigetur quantitas angulorum y & x, item z & u (§. 134.). Quorum ſummæ dant angulos C & D (§. 85. *Arith:*).

II. Quæratur porro diſtantia ſtationum CD.

III. Et ducatur in charta linea recta; in quam ex ſcala Geometrica trasferatur recta cd ipſi CD reſpondens (§.237.).

IV. Super ea ope angulorum x & z + u conſtruatur triangulum bcd, & ope angulorum z & x + y, alterum acd (§.220.).

V. Tandem in ſcala Geometrica inveſtigetur diſtantia punctorum a & b (§. 237.).

Dico eſſe AB: CD = ab: cd.

DEMONSTRATIO.

Eadem cum præcedente.

SCHOLION.

Tab: II. Fig: 30. 245. *Levi attentione patet ſimili modo ex duabus ſtationibus reperiri diſtantias plurium locorum. Nec minus manifeſtum eſt menſulæ ſitum in iſtiusmodi operationibus horizontalem eſſe debere, id quod obtinetur ope perpendiculi ABC.*

PROBLEMA XXVIII.

Tab: V. Fig: 73. 246. *Lineæ inacceſſibili AG ducere parallelam XZ.*

RESOLUTIO.

I. Fiant omnia ut in problemate præcedenti (§. 244.), ut obtineatur angulus ex: gr: AKS æqualis ipsi ABC = abc: cui

II. Fiat KSZ æqualis (§. 139.); erit SZ, sive si protendatur XZ parallela ipsi AG (§. 203.).

PROBLEMA XXIX.

247. *Ad lineam inaccessibilem AG perpendicularem erigere KI.*

RESOLUTIO.

Erigatur perpendicularis KI ipsi XZ parallelæ ipsius inaccessibilis AG, erit etiam KI perpendicularis ipsi AG (§. 200.).

PROBLEMA XXX.

248. *Altitudinem accessam AB metiri.* Tab: V. Fig: 74.

RESOLUTIO.

I. Baculus DE tantæ longitudinis sumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.

II. Humi prostratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 110.).

III. Tentando id agendum, ut E & B sint cum oculo in C in eadem recta; quodsi itaque humi prostratus ex C habeas & E & B in eadem recta.

IV. Distantiam oculi C ab altitudine AB metire (§. 113.].

Dico esse CA = AB. DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim ED *per conſtr:* & AB per §. 197. perpendiculares; ſunt inter ſe parallelæ (§. 217.), adeoqué CD: DE = CA: AB (§. 229.), ſed CD = DE *per hypoth:* Ergo CA = AB (§. 126. *Arithm:*).

Aliter.

Tab: VI. Fig: 75. I. In diſtantia plurium ex.gr. 30, 40 & amplius pedum, defigatur perpendiculariter baculus DE, & aliquô hinc intervallô in C alius minor, ita ut cum oculo in F conſtituto E & B ſint in eadem recta.

II. Inveſtigetur diſtantia baculorum GF, item diſtantia baculi minoris ab altitudine HF, & differētia baculorum altitudinum GE (§. 113.).

III. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 276. *Arithm:*).

IV. Huic addatur altitudo baculi minoris FC, vel pars AH.

Dico BH + AH, ſeu ſummam iſtam eſſe altitudinem quæſitam AB.

Ex. gr. Sit $HF = 48'$, $GF = 20'$, $GE = 16'$ & $FC = 5'$

$4\,(20' : 16' = 48'$

ſeu

$5' : 4' = 48' : 38\frac{2}{5} = BH$

$5 = FC = AH$

$43\frac{2}{5} = AB$

DE-

DEMONSTRATIO.

Cùm HF ipſi AC parallela ſupponatur, ſintqué BA (§. 197.), & ED *per conſtr:* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF (§. 200.), adeoqué EG & BH parallelæ (§. 220.). Ergo GF: GE = HF: HB (§. 229.). *Q. e. unum.*

Porro cùm HA & FC ſint perpendiculares inter eaſdem parallelas HF & AC *per conſtr:* (§. 197.), erit FC = HA (§. 196.). Quare BH + FC = BH + AH (§. 78. *Arithm.*) = BA (§. 85. *Arithm:*). *Q. e. alterum.*

Aliter Sole lucente aut Lunâ.

I. Inſigatur baculus certæ menſuræ DE, & menſuretur umbra DS projecta à baculo. Tab: VI. Fig: 75.

II. Menſuretur umbra etiam AS ab AB projecta.

III. Siquidem △ EDS ∽ △ BAS (§ 156.); inferatur DS: ED = AS: AB (§. 153.).

Aliter.

I. Menſula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipſius FE ſit horizonti parallelum, id quod obtinetur ope perpendiculi BAC. Tab: VI. Fig: 76.

II. Ducatur recta ed lateri menſulæ parallela, & regulâ cum dioptris ad hanc applicata vertatur menſula, donec collineatio in altitudinem quæſitam fiat. Tab: II. Fig: 30.

III. Circa punctum e vertatur regula, donec oculo per dioptras tranſpicienti apex altitudinis B occurrat, ducaturqué recta eb.

IV. Quæratur diſtantia ſtationis ab altitudine eC (§. 113.).

V. Ex ſcala Geometrica transferatur ex e in c (§. 237.).

VI. Ex c erigatur perpendicularis bc (§. 102.), quæ

VII. Ad ſcalam Geometricam applicata, æqualis erit parti altitudinis BC.

VIII. Addatur altitudo AC.

Dico ſummam eſſe altitudinem BA.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad AD (§. 197.) & Ce ipſi AD parallela *per conſtr:*, erit eadem AC perpendicularis ad Ce (§. 200.). Sed ad eandem ce eſt perpendicularis etiam bc *per conſtr:*, ergo bc ipſi BC parallela (§. 217.); conſequenter ec: cb = eC: CB (§. 229.). Ergo CA + CB = BA (§. 85. *Ar:*). *Q. e. d.*

Aliter.

I. Inveſtigetur quantitas anguli e (§. 134.), & diſtantia ſtationis eC (§. 113.).

II. Super eC ex ſcala Geometrica aſſumpta conſtruatur triangulum ad c rectangulum ecb (§. 220.).

Erit ec: cb = EC: CB.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim C = c & E = e *per conſtr:* adeoque ec: cb = EC: CB (§. 230.). *Q. e. d.*

Aliter

Aliter.

I. Sufpendatur ex puncto F quadrans, fimulqué ex centro quadrantis filum FR, cui pondus fit appenfum, demittatur. Tab: V. Fig: 74.

II. Per dioptras quadrantis in L & F refpiciatur ad apicem altitudinis in A.

III. Notentur gradus in arcu RG, ut obtineatur angulus RFG = ipfi AFB.

IV. Reliqua omnia fiant, ut in cafu præcedenti.

DEMONSTRATIO.

Eadem eft, quæ in cafu præcedenti; unum præterea evincendum; angulum fcilicet RFG æqualem effe angulo AFB. *Quod ita patet.*

Anguli HFR & LFG funt recti *per conftr:* adeoqué æquales (§. 127.), dempto proinde utrinqué angulo communi LFR, erit angulus RFG = anguloHFL(§.81.*Arit:*),fed angulus HFL = AFB(§.140); confequenter etiam RFG = AFB (§.77. *Arit:*). *Q.e.d.*

SCHOLION I.

249. *In omnibus iftis refolutionibus fupponitur planities perfectè horizontalis, quæ cum rariffime in praxi occurrat, fi notabilis fuerit declivitas, non tam inftrumenti altitudo, quam ipfa CA addenda in altitudine acceffa facile inveftiganda. Neceffe etiam, ut baculi ad horizontem perpendiculariter infigantur & in inftrumentis præfcripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur, imo altitudo AC eódem modó inveniri poteft, quo ipfam BC invenimus.*

SCHOLION II.

250.

Tab:VI. Fig: 76. 250. *Denique in metiendis altitudinibus diſtantia ejuſmodi aſſumenda, ut angulus hec non multum abeat à ſemirecto, ita enim, etſi contingat in angulo error, erit is minor hoc in angulo, quam in majore, aut minore; quæ res in Trigonometria demonſtrabitur.*

SCHOLION III.

Tab: V. Fig: 68. 251. *Sed in diſtantiis metiendis ex uno loco eadem Trigonometria teſte ſtatio in E ea eligenda, ut angulus AEB ſit major recto, id quod obtinetur, ſi latus EB ſit > EA.*

Tab: V. Fig: 71. 72. *In diſtantiis verò metiendis ex duobus angulis C & A atque latere uno (§. 244.), ſi erratum eſt in angulo C vel A aut C vel D, minimus error admittitur, ſi angulus B ſit rectus; aut etiam in 2do caſu anguli B & A ſint recti. De his præmonendos Geometras hic loci eſse viſum fuit, antequam in Trigonometria demonſtrabuntur.* Non *ſolùm verò in angulis, ſed in lateribus aberrationum caſus omnes exactiſſimè perſequitur doctiſſimus MARINONIUS.* (a)

PROBLEMA XXXI.

Tab: VI. Fig: 75. 252. *Altitudinem inacceſsam AB metiri.*

RESOLUTIO.

Absque Inſtrumentis.

I. Diſtantia ſtationis CA vel HF quæritur (§. 241.).

II. Reliqua fiunt FG: GE = FH: AB &c. ut §. 248. *Aliter.*

(a) *De Re Ichnographica C. V. toto.*

Aliter.

I. Collineetur per F & I in A; tum — Tab: VI. Fig: 75.
II. Inveniatur diſtantia AC inferendo $a : b = d+x : x$ (§.230.), hoc eſt $a-b : b = d+x-x : x$ (§168 *Ar:*); erit ergo $\frac{bd}{a-b} = x = DA$ (§.276. *Arith:*).
Igitur DA + DC = AC (§.85. *Arithm:*).
III. Habita AC invenietur BA, ut §. 248; Scilicet SD:DE = SA: AB (§. 230.).

COROLLARIUM.

253. Si DE = a, BC = b, BD = d. & diſtantia BA ſit = x, reperietur etiam BA $= \frac{bd}{a+b}$. — Tab: V. Fig: 70.

Aliter.

254. I. Statione in D electa menſula collocetur, ut in Problemate præcedente §. 248. — Tab: VI. Fig: 77.
II. Ducantur ut ibidem rectæ ef & af.
III. Baculi in G defixi, ut ſit in recta fc, quæratur diſtantia à puncto f (§. 113.), &
IV. Ex ſcala Geometrica transferatur in fe (§. 237.).
V. Sub puncto F defigatur baculus & menſula ita collocetur in G, ut punctum e ipſi G immineat, id quod obtinetur per ſectionem filarem planorum inferius demonſtrandam, & per dioptras regulæ ad ef applicatæ reſpicienti baculus ſub puncto f conſtitutus occurrat.

VI.

VI. Vertatur regula circa punctum e, donec per dioptras profpiciens apicem A videat, ducaturqué recta ea.

VII. Ex puncto a demittatur a c ad fc perpendicularis (§. 187.); quæ

VIII. Ad fcalam Geometricam applicata prodit altitudinem AC.

IX. Quodfi puncta B, G, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti f, ut habeatur AB; fin minus regula circa e vertatur, donec per dioptras videatur B; ducaturqué ab & perpendiculum a c continuetur, donec ipfi cB in b occurrat.

Etenim a b in fcalam Geometricam translata manifeftabit AB.

DEMONSTRATIO.

Siquidem in △△ fea & F e A, eft angulus afe = AFe, & aeF = AeF *per conftr:*. Ergo fe: ea = Fe: eA (§. 230.).

Præterea AC & ac perpendiculares ad FC *per conftr:*, adeoqué inter fe parallelæ (§. 217.); confequenter ea: ac = eA: AC (§. 230.), igitur fe: ac = Fe: AC (§. 169. *Arith:*). *Q. e. unum.*

Quoniam a b parallela ipfi AB *per demonftr:* eôdem modô erit ae: ab = Ae: AB (§. 230); & fe: ea = Fe: EA *per demonftr:*, proindè fe: ab = Fe: AB (§. 172. *Arith:*). *Q. e. alter.*

SCHOLION I.

255. *Si loco montis effet pons in C & B extremum profundum fofsa, effet ob declivitas &*

& cb altitudo sive profunditas fossæ. Sed possunt quoque & altitudines & declivitates fossarum, vallium &c. eôdem modô inveniri, quo & cæteræ altitudines *ex. gr.*

Aliter.

I. Assume stationes non in directum sitas, sed utrinqué ad latus recedentes C & D. Tab: VI. Fig: 78.

II. In C mensurentur anguli ACD & BCD &c. in D verò anguli ADC, ADB & BDC &c. (§. 134.), Item distantia DC (§. 113.).

III. Ducatur per intersectiones linearum recta AB, quæ ad scalam applicata dabit longitudinem altitudinis inclinatæ AB; quodsi

IV. Ducatur perpendicularis EB ad horizontalem BD; erit ea altitudo ipsius AB = ipsi AG.

Facilè quoqué patet eôdem modô inflexionem linearum in punctis S, T, X &c. determinari posse.

D E M O N S T R A T I O.

Eadem, quæ problematis XXVII. §. 244.

vel

256. Ponatur fossæ profunditas BA, altitudo inclinata cA; si inquiratur primum in latitudinem cD (§. 241, 242.), ut inveniatur etiam altitudo BA & declivitas cA, Tab: VI. Fig: 77.

I. △ abc, cujus omnia latera in numeris exdivisa sint, margini fossæ applicetur, &

II. Quoniam in △△ a b c & ABc angulus b
G =B

$=$ B (§. 197, 67,127.), anguli ad c quoque æquales (§. 143.), inferatur bc : ac $=$ Bc: Ac, vel bc : ab $=$ Bc: AB (§. 230. *Geom:* & 276. *Arith:*).

Eôdem etiam modô puteorum profunditates inveniuntur.

S C H O L I O N II.

257. *Quodsi CD referat latus turris alicujus, C verò & D fenestras, altitudinem ipsius AB, imò distantias turrium, templorum eôdem modô dimetiri & determinare licet. Nos in Turri ad Ædes D. Joannis nostri 214. pedum præalta ejusmodi praxis quippiam instituimus.*

D E F I N I T I O LXXVII.

Tab: VI. Fig: 79. 258. *Linea libellæ* est linea curva AB, cujus puncta omnia æqualiter distant à centro Telluris D. Linea verò recta AC est linea *libellæ, seu horizontalis apparens* non differens sensibiliter à curva AB, nisi 100. orgiis sit longior.

D E F I N I T I O LXXVIII.

259. *Ars libellandi* est, qua invenitur, quanto plus unum superficiei punctum B, quam alterum n à centro Telluris D distet. Puncta hæc *termini libellationis* dicuntur.

C O R O L L A R I U M.

260.

260. Libellatione itaqué altitudinum differentia, montium, ſuperficiei aquarum fluentium vel aliô deducendarum declivitates determinantur.

D E F I N I T I O LXXIX.

261. *Inſtrumentum libellationum* eſt, quod lineam horizontalem FC ad radium telluris AD perpendicularem definit.

S C H O L I O N I.

262. *Communiſſimum eſt recurvus tubus vitreus AB aqua colorata repletus, cujus ſummæ ſuperficies ad libellam ſe componentes dioptrarum loco ſerviunt, per quas linea horizontalis determinetur.* Tab: VI. Fig: 80.

Optimum ac ſimpliciſſimum libellæ genus eſt, ſi regula AB trium pedum dioptris inſtructa alteri CD 4. pedum ad angulum rectum jungatur perpendiculo ex C pendulo. Cæterum tam regula dioptrica, quam pes menſulæ prætorianæ ita aptari poteſt, ut & huic inſtrumento & pyxidi magneticæ ſerviat. Fig: 81.

S C H O L I O N II.

263. *Quo regulæ AB & CD longiores fuerint, eò exactior erit operatio. Tubulus opticus Regulæ AB ſubſtitutus & filis perpendiculariter ſe interſecantibus inſtructus terminis longius diſtantibus libellandis melius ſatisfacit; ſed multa circumſpectione ea in re opus eſt, id quod in Aſtronomia ex principiis opticis docetur.*

SCHOLION III.

Tab: VI. Fig: 82. 264. *Pro libellatione etiam parari debent duæ vel tresperticæ, in quibus pro libitu attolli, deprimi & ope cochleæ firmari possint tabulæ quadratæ nigro colore tinctæ, in medio tamen duabus albis lineis se decussantibus distinctæ, ad quarum interjectionis punctum collineatio fieri possit.*

PROBLEMA XXXII.

265. *Libellare amnem à termino A ad terminum B.*

RESOLUTIO.

Tab: VII. Fig: 83. I. Libella in C constituta collima per ejus dioptras, & perticarum F & G perpendiculariter defixarum tabulas m & n à socio tam diu attolli facito, donec m C n sint in linea recta.

II. Mensura As + sm altitudinem scilicet puncti hujus primi m supra aquæ superficiem. Tandem

III. Libella transferatur in D; & uti prius collima, donec o D p sint in linea recta & metire no. Similiter

IV. Eadem fac in E, & metire pq, itemqué rb + bB; nempè usqué ad aquæ in hoc altero libellationis termino superficiem. Deniqué

V. Altitudines hæ omnes no + pq + rb + bB addantur, & subtrahatur Am excessus puncti m supra datum primum libellationis terminum. Dico

Dico reſiduum By forè differentiam altitudinum, ſive declivitatem amnis in B à termino A; ſive quod eodem redit, By altitudinem puncti A à termino B.

Ex. gr. Sit no = 8 pedum, pq = 4, rb = 4, bB = 2 & Am = 5; erit By = 18 — 5 = 13.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam A eſt punctum peripheriæ terræ *per hypoth:* erit At pars radii à centro terræ (§. 32.), & cum ipſæ ps, rt, yA ſint perpendiculares ad mX (§. 261.), erunt etiam inter ſe parallelæ (§. 217.), Quare cum puncta A & B ſint puncta ſuperficiei terræ, ſitqué By perpendicularis ipſi BX *per hypoth:* & mX = no + pq + rb + bB (§. 85. *Arithm:*), erit no + pq + rb + bB — Am = mX — Am (§. 81. *Arith:*) = Ax (§. 217. *Arith:*). Sed AX = By (§. 196.), & etiam AX eſt pars diſtantiæ puncti A à centro eodem (§. 8. *Ar:*); conſequenter By eſt declivitas puncti B à puncto A, ſive By eſt altitudo puncti A à puncto B (§. 14. *Arit:*). *Q. e. d.*

C O R O L L A R I U M.

266. Quodſi declivitates ſint partim aſcendentes, partim deſcendentes, addantur omnes aſcendentes Ao + oc + cd + ef; addantur etiam deſcendentes inter ſe de + fg + gh + hB ſumma minor â majore ſubtrahatur; reſiduum erit differentia altitudinis loci unius A præ alio B, ſive puncti ejus, in quo libellare deſieris. Tab: VII. Fig: 84.

 267.

SCHOLION I.

267. *Quoniam in hac operatione facile aberrari poteſt, conſultum eſt, ut libellatio bis inſtituatur, nempè 1mo à termino A ad terminum B, deindè retrò à termino B usqué ad terminum A. Diſtantiæ quoqué oo, cc, dd, & mensurandæ, ſi præter differentiam altitudinis terminorum A & B ſimul interjecti tractus ichnographia petatur.*

Fig: 84.

SCHOLION II.

Tab: VII. Fig: 85. 86.

268. *Accurata etiam libellatio montium peragi poteſt ope perticæ quadriangularis non flexilis AC, 10, vel 20, pedes longæ, & aliarum duarum BD & GH; in quibus illa pro libitu diſponi, attolli, firmari poſſit. Si enim pertica hæc AC ope perpendiculi P conſtituatur horizontaliter, altitudines AC + CD + DE + EF — FB determinabunt differentiam altitudinis terminorum A & B.*

SCHOLION III.

269. *Hæc ex R. P. JOSEPHO LIESGANIG è S.J. adjecta demonſtratione problematis decerpſi, ex eo, quod pro more & clarè & breviter rem abſolvat ad captum Tyronum. Variorum autem & ferme omnium libellarum genera, ſi quis noſſe deſiderat adeat celeberrimum JACOBUM LEOPOLDUM* (a)

CAPUT

(a) *Parte 4ta Theatri ſtatici Univerſalis ſive in Theatro Horizontatico ſeu libellationis.*

CAPUT IV.
DE CIRCULI SYMPTOMATIS.

THEOREMA XXXIII.

270. *IN eodem vel æqualibus circulis chordæ æquales AB & ED æquales arcus ſubtendunt, & contra.*

DEMONSTRATIO.

Angulus ACB = DCE (§. 140.); conſequenter arcus AB & DE menſuræ angulorum ACB & DCE æquales ſunt (§. 48.). *Q. e. 1mum.* Tab: VIII. Fig: 87.

Arcus AB & DE æquales ſunt *per hypoth:* ſunt verò iidem menſuræ angulorum ACB & DCE (§. 48.), anguli igitur iſti æquales ſunt (§. 49.). Quoniam porro BC = CE & AC = CD (§. 32.), erit quoque AB = DE (§. 159.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXXIV.

271. *Si in circulis inæqualibus arcus AB & ab fuerint ſimiles; chordæ cognomines ad ſuos radios AC & ac eandem rationem habent.* Fig: 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & ab ſimiles ſunt *per hypoth:* iidemque menſuræ angulorum ACB

& acb (§. 48.), erit ACB = acb (§. 49.). Eſt verò AC: BC = ac: bc (§. 32. *Geom:* & 126. *Arithm:*), igitur △ ABC ∽ △ abc; conſequenter AB: BC = ab: bc (§. 230.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXV.

Tab: VIII. Fig: 88. 272. *Radius CE chordam BA bifariam ſecans in D, etiam arcum bifariam ſecat in E, & ad chordam BA perpendicularis; & contra, ſi radius CE arcum ſecuerit bifariam; chordam quoq; ſecabit bifariam & ad chordam perpendicularis erit. Item ſi radius CE perpendicularis ad chordam AB; & arcum AEB, & chordam AB ſecabit bifariam.*

DEMONSTRATIO.

AD = DB *per hypoth:* AC = CB (§. 32.), DC = DC; ergo o = x, & y = u (§. 159.); conſequenter & CE ad AB perpendicularis in D, (§. 68.); & arcus AE atque EB æqualium angulorum y & u menſuræ (§. 48.) æquales ſunt (§. 49.). *Q. erat unum.*

Sint arcus AE & EB æquales *per hyp:* cum iidem ſint menſuræ angulorum u & y (§. 48.), erit y = u (§. 49.). Eſt verò etiam AC = CB (§. 32.) & DC = DC; ergo o = x (§. 159.); conſequenter & AD = DB (§. cit.) & CD ad AB perpendicularis (§. 68.). *Q. erat ſecundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth:* erit o = x (§. 68.). Eſt verò etiam AC = CB (§. 32.) & hinc m = n (§. 161.); conſequenter

ter

ter $y = u$ (§. 213.). Quare & arcus AE & EB æqualium angulorum u & y menſuræ (§. 48.) æquales ſunt (§. 49.); & AD = DB (§. 159.). *Q. e. tertium.*

THEOREMA XXXVI.

273. *Si recta NE chordam AB bifariam ſecet, & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum tranſit, & tam arcum AEB, quam arcum ANB bifariam ſecat.* Tab: VIII. Fig: 88.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB *per hypoth:*, erit $o = x$ (§. 68.). Eſt verò etiam AD = DB *per hypoth:* & ND = ND. Ergo AN = NB (§. 159.); conſequenter arcus AIN, & NOB æquales (§. 270.). Eôdem modô oſtenditur arcus AE & EB æquales eſſe. *Q. erat unum.*

Arcus AN = NB & AE = EB *per demonſtr:*; ergo AN + AE = NB + BE (§. 78. *Arithm:*); conſequenter NE diameter circuli (§. 119.), adeoqué per centrum tranſit. (§. 31.). *Q. e. alterum.*

PROBLEMA XXXIII.

274. *Datum arcum AB in duas partes æquales dividere.* Tab: VIII. Fig: 88.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium D chordæ AB perpendicularis NE (§. 180.); hæc arcum

AB

AB bifariam secabit. (§. 272.). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA XXXIV.

Tab: VIII. Fig: 89. 275. *Per data tria puncta non in directum jacentia A, B & C circulum describere.*

RESOLUTIO.

I. Ex A & C fiant intersectiones in D & E, itemque aliæ duæ in G, H, ex C & B.

II. Ducantur rectæ DE & HG.

Dico I esse centrum circuli per A, C & B describendi (§. 116.).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C, & B, sunt in peripheria alicujus circuli *per hypoth:* ideoque rectæ AC & CB chordæ (§. 31.); sed ED ad AC, GH ad BC perpendicularis, & ED ipsam AC, GH verò ipsam BC bifariam secat (§. 180.). Ergo utraque per centrum transit (§. 273.); Quare cum DE & GH tantum in I se mutuò secent (§. 42.), erit I centrum circuli per puncta data A, C & B transeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

276. Assumptis in peripheria vel arcu circuli tribus punctis, centrum inveniri, datusque arcus perfici potest.

COROLLARIUM II.

277.

277. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant, peripheriæ totæ congruunt; atqué adeo circuli æquales sunt (§. 145.).

COROLLARIUM III.

278. Omne triangulum circulo est inscriptibile (§. 104.).

THEOREMA XXXVI.

279. *In eodem vel æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE à centro C æqualiter distant, & contra.* Tab: VIII. Fig: 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG sunt distantiæ chordarum AB & DE à centro *per hypot:*, erunt ad chordas perpendiculares (§. 195.); & hinc o & x recti (§. 67.); adeoqué æquales (§. 127.). Porro cum AB = DE *per hypoth:* & CF ad AB perpendicularis *per demonstr:* ipsam DE bisecet (§. 72.), erit FA = DG (§. 152. *Arith:*). Quare cum etiam sit AC = CD (§. 32.), erit CF = CG (§. 155.). *Q. erat unum.*

Quodsi distantiæ FC & CG fuerint æquales *per hypoth:* cum sit o = x *per demonstr:* & AC = CD (§. 32.), erit AF = DG (§. 155.), sed AF = $\frac{1}{2}$ AB, & DG = $\frac{1}{2}$ DE (§. 272.); Ergo AB = DE (§. 152. *Arith:*). *Q. e. alterum.* THEO-

THEOREMA XXXVIII.

280. *Chordarum maxima eſt diameter AB.*

DEMONSTRATIO.

Tab: I. Fig: 7. Eſt enim Co = BC & CN = CA (§. 32.), ſed Co + CN > oN (§. 169.); ergo BC + CA hoc eſt BA > oN (§. 79. *Ar:*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

281. Cum in ſemicirculo ipſo ſemicirculus BDEA eſt arcus major quolibet BDEN, aut BDE (§. 85, *Arithm:*); chorda arcûs majoris AB major eſt, chorda minoris arcus ED eſt minor (§. 270. 31.).

THEOREMA XXXVIIII.

Tab: VIII. Fig: 90. 282. *Si intra triangulum ACB, ſupra ejuſdem baſi AB conſtruatur triangulum AD B; erunt crura interioris AD & DB ſimul ſumpta minora cruribus exterioris AC & C B ſimul ſumptis: angulus verò ad verticem interioris D, major angulo ad verticem exterioris C.*

DEMONSTRATIO.

Quia AE < AC + CE (§. 169.), erit AE + EB < AC + CE + EB (§. 80. *Arith:*), hoc eſt AD + DE + EB < AC + CB (§. 85, 79. *Arithm:*). Sed DB < DE + EB (§. 169.); ergo multò magis AD + DB < AC + CB (§. 14, 80 *Arith:*). *Q. e. unum.* Quo-

Quoniam o > x & u > m (§. 168.); erit o + u > x + m (§. 80. *Arith:*). *Q. e. alter.*

THEOREMA XL.

283. *Secantium MA, MN, ME, ex eodem puncto M ductarum, maxima est MA, quæ per centrum transit, reliquæ sunt tanto minores, quò à centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum MD, Mo, MB, sunt tantò majores, quò magis à centro distant. Minima est MB secantis MA per centrum transeuntis, atqué duæ tantum rectæ ME & MZ æquales duci possunt.* Tab: I. Fig: 7.

DEMONSTRATIO.

1mò. NC + MC > MN (§. 169.), & NC = CA (§. 32.), ergo CA + MC > MN (§. 14. *Arit:*); consequenter cum CA + MC sit = MA (§. 85. *Arith:*), erit MA > MN (§. 79. *Arit:*). *Q. e. primum.*

2dò. Mo + Eo > ME (§. 169.), sed oN > Eo (§. 281.), ergo multò magis Mo + oN, hoc est, MN (§. 85. *Arith:*) > ME (§. 80. *Arith:*). *Q. e. secundum.*

3tiò. Co + oM > MC (§. 169.); sed Co = CB (§. 32.); ergo CB + oM > MC (§. 79. *Arith:*); consequenter oM > MB (§. 82. *Arit:*). *Q. e. tertium.*

4tò. CD + DM > Co + oM (§. 282.), sed CD = Co (§. 32.); ergo CD + DM > Co + oM (§. 79. *Arit:*); consequenter DM > oM (§. 82. *Arith:*). *Q. erat quartum.*

Ultimum deniqué ex Demonstratis patet. *Q. e. quintum.*

THEO-

THEOREMA XLI.

Tab: VIII. Fig: 91. 284. *Si ex puncto E intra circulum assumpto ducantur in peripheriam rectæ EF, EB, EG, &c. Item EA, ED, EH, &c. maxima erit EF, quæ per centrum C transit; reliquæ EB, EG, &c. tantò majores, quò maximæ propiores. Contra minima est ea, quæ continuata per centrum transit; reliquæ ED, EH, &c. sunt tantò majores, quò ab ea remotiores.*

DEMONSTRATIO.

1mò. $EC + BC > EB$ (§. 169.), sed $BC = CF$ (§. 32.), ergo $EC + CF > EB$ (§. 79. *Arithm:*): hoc est $EF > EB$ (§. 75. *Arith:*). *Q. e. primum.*

2dò. $EI + GI > GE$ & $IB + IC > BC$ (§. 169.): hoc est ob $BC = GI + IC$ (§. 32.), $IB + IC > GI + IB$ (§. 79. *Arithm:*), adeoqué $IB > GI$ (§. 82. *Arith:*). Quare $EI + IB > EI + GI$ (§. 80. *Arith:*), adeoqué $EI + IB$, hoc est EB (§. 85. *Arit:*) $> GE$. *Quod erat alterum.*

3tiò. $CE + ED > CD$ (§. 169.), sed $CD = CE + EA$ (§. 32.); ergo $CE + ED > CE + EA$ (§. 79. *Arith:*); consequenter $ED > EA$ (§. 82. *Arit:*). *Q. e. tertium.*

4tò. $EK + KD > ED$, & $KH + KC > CH$ (§. 169.); hoc est ob $CH = CK + KD$ (§. 32.); $KH + KC > KC + KD$ (§. 79. *Ar:*) adeoqué $KH > KD$ (§. 82. *Arit:*). Quare $EK + KH$; hoc est EH (§. 85. *Arith:*) $> ED$. *Q. erat quartum.*

THEO-

THEOREMA XLII.

285. *Recta IL radio CL perpendiculariter insistens, tangit circulum in unico puncto L; nec inter tangentem HL & circulum alia recta duci potest.* Tab: I. Fig: 3.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta quælibet alia CK; quoniam IL perpendicularis ad CL *per hypot:*, adeoqué L est rectus (§. 67.); consequenter K erit acutus (§. 189.). Ergo CK > CL (§. 161, & 191.); consequenter quodlibet punctum K ab L diversum, hoc est tota linea IL seu HI extra circulum cadit (§. 13 & 32.), & ideò IL circulum tangit in unico puncto L (§. 39.). *Q. erat unum.*

Ducatur deindè, si fieri potest, inter tangentem HL & circulum recta quæpiam ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 187.), erit D rectus (§. 67.), adeoqué CL > CD (§. 191.). Cadit itaqué D intra circulum (§. 32.); quod cum hypothesi repugnet, inter tangentem & circulum recta alia per contactum transiens duci non potest. *Q. erat alterum.*

COROLLARIUM I.

286. Angulus igitur contactus tangente HL & arcu ML interceptus est quôvis rectilineo minor; angulus verò semicirculi inter radium CL & arcum ML interceptus, est quôvis rectilineo acuto major.

SCHO-

SCHOLION.

287. *Hoc paradoxum EUCLIDIS insignium etiam Mathematicorum exercuit ingenia. Videatur ea de re Vallisius & noster R. P. Chrystophorus Clavius complexus est, ac dissolvit fallacias circa ea clarissimus Geometra R. P. ANDRÆAS TAQUETUS.* (a)

COROLLARIUM II.

288. Circulum in eodem puncto L nonnisi unica recta HI tangere potest. Cùm verò superficies plani solis lineis constet (§. 22.), circulus planum in unico non nisi puncto tangere potest.

THEOREMA XLIII.

Tab: I. Fig: 3. 289. *Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactûs ducta perpendicularis est.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 187.), quæ utpotè tangens *per hypoth:* extra circulum cadet (§. 39.); consequenter CK > CN (§. 75. *Ar:*) > CL (§. 32. *Geom:* & §. 79. *Arithm:*). Est verò etiam CK < CL (§. 191.); quod cùm sit absurdum (§. 154.); tangens IL radio CL ad contactum ducta est perpendicularis. *Q. e. d.*

CO-

(a) *Scholio ad prop: XII. Elem: Geom: lib: 3.*

COROLLARIUM I.

290. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactûs rectum (§. 67.).

COROLLARIUM II.

291. Si HI circulum tangat, & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 187.), punctum contactus L determinatur (§. 289.). Tab: I. Fig: 3.

PROBLEMA XXXV.

292. *Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Ex centro circuli C ad punctum contactûs L ducatur radius CL.

II. In L excitetur perpendicularis LH (§. 216.), hæc circulum in L tanget (§. 289.). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA XLIV.

293. *Arcus FG & HI inter chordas parallelas intercepti sunt æquales.* Tab: VIII. Fig: 92.

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 187.); erit eadem perpendicularis ad GI utpotè *per hypoth:* parallelam (§. 200.); consequenter dividet tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 272.). Quare

KF — KG = KH — KI, hoc eſt FG = HI (§. 81. *Arithm:*). *Q. e. d.*

THEOREMA XLV.

Tab: I. Fig: 13. 294. *Angulus ad centrum ACD eſt duplus anguli ad peripheriam ABD eidem arcui AFD inſiſtentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipſi BD parallela (§. 219.); erit EB = DF (§. 293.); adeoque o = x (§. 48. 49.). Sed o = y (§. 140.); ergo x = y (§. 77. *Arithm:*) = $\frac{1}{2}$ ACD [§. 154.] Porro o = u [§. 202.]; ergo u = y = $\frac{1}{2}$ ACD [§. 77. *Arith:*]. *Q. e. primum.*

Tab: VIII. Fig: 93. II. *In caſu altero.* o = 2y, & u = 2x *per caſum primum.* Ergo u + o = 2x + 2y [§. 78. *Arithm:*]. Hoc eſt [u + o] : 2 = x + y [§. 84. 63. *Arithm:*], ſive $\frac{1}{2}$ ACD = ABD [§. 84. *Arithm:*]. *Q. e. ſecundum.*

Fig: 94. III. *In caſu tertio.* o + u = 2y + 2x *per caſum 2dum*, & o = 2y *per caſum 1mum*, ergo u = 2x [§. 81. *Arithm:*]; hoc eſt $\frac{1}{2}$

u

u = x [§. 84. *Arit:*] five $\frac{1}{2}$ ACD = ABD. *Q. e. tertium.*

THEOREMA XLVI.

295. *Anguli ad peripheriam ABD menfura eſt arcus dimdius AD, cui inſiſtit.* Tab: I. Fig: 13.

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore fegmento; infiftet ergo arcui minori AD, quàm femicirculo [§. 37. 47.]; adeoqué ipfi refpondet angulus ad centrum ACD [§. 61.]; fed anguli ACD menfura eft arcus AD [§. 48.]; ergo ipfius ABD menfura dimidius arcus AD [§. 294. 49.]. *Q. erat unum.*

II. Sit ACB angulus in femicirculo; ducatur utcunqué recta CD, erit arcus dimidius AD menfura anguli ACD, & $\frac{1}{2}$ DB menfura ipfius DCB *per caſum ımum.* Ergo $\frac{1}{2}$ ADB menfura ipfius ACB [§. 155.]. *Quod erat 2dum.* Tab: VIII. Fig: 95.

III. Sit denique HIK angulus in minore fegmento [§. 37.]; ducatur utcunqué recta IL, erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL menfura anguli HIL, Fig: 96.

& $\frac{1}{2}$ LK menſura anguli LIK [§. 294.];

Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK menſura anguli HIK.

Q. erat 3tium.

COROLLARIUM I.

Tab: I. Fig: 14. 296. Duo vel plures anguli HLI & HMI eidem arcui HI, vel æqualibus arcubus inſiſtentes æquales ſunt [§. 49.].

COROLLARIUM II.

Fig: 14. 297. Quare cùm ſit o = x + u [§.206.], erit anguli extra centrum menſura dimidium arcuum HXI & LM, quibus ipſe & ejus verticalis K inſiſtunt [§. 295.].

COROLLARIUM III.

Tab: VIII. Fig: 95. 298. Cùm angulus C in ſemicirculo ACB ſemicirculo inſiſtat *per hypoth:* menſura ejus eſt circuli quadrans [§. 295.]; adeoque ipſe rectus eſt [§. 125.].

COROLLARIUM IV.

Fig: 96. 299. Cùm angulus in majore ſegmento DIE arcui DE minori, quam eſt ſemicirculus, inſiſtat [§. 37. 59.]; menſura ejus eſt quadrante minor [§. 295.]; adeoque ipſe recto minor [§. 125.]; conſequenter acutus [§. 55.].

CO-

COROLLARIUM V.

300. Eôdem modô patet angulum in minore ſegmento HIK eſſe obtuſum.

COROLLARIUM VI.

301. Quoniam $o = x + y$ [§. 206.], & anguli o menſura eſt $\frac{1}{2}$ ML, anguli vero y $\frac{1}{2}$ NO [§. 295.]; anguli extra peripheriam G menſura eſt differentia inter arcum dimidium concavum, LM cui inſiſtit, & dimidium arcum convexum NO inter crura interceptum. Tab: VIII. Fig: 97.

PROBLEMA XXXVI.

302. *Normam examinare, utrum exacta ſit.*

RESOLUTIO.

I. Deſcribatur intervallô arbitrariô ſemicirculus AEF, & Fig: 98.

II. Ducantur in eo ex diametri utroqué extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrariô aſſumptum rectæ AE & EF.

III. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex ſuper E cadat. Hoc enim ſi fieri poteſt, erit norma exacta [§. 298 & 182.].

THEOREMA XLVII.

303. *Menſura anguli minoris ſegmenti ATB eſt dimidium arcûs TDB; anguli verò majoris ſegmenti BTH dimidium arcûs majoris BEGT.* Tab: VIII. Fig: 99.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactûs diameter TE, erit ATE rectus [§. 289.]; consequenter mensura ejus $\frac{1}{2}$ EBDT [§. 125.], sive cum sit ATE = BTE + ATB, & $\frac{1}{2}$ EBDT = $\frac{1}{2}$ EB + $\frac{1}{2}$ BDT [§. 85. *Arith:*], erit BTE + ATB = $\frac{1}{2}$ EB + $\frac{1}{2}$ BDT [§. 14. *Arith:* & 49. *Geom:*], hoc est: quoniam BTE = $\frac{1}{2}$ EB [§. 49. *Geom:*], erit $\frac{1}{2}$ EB + ATB = $\frac{1}{2}$ EB + $\frac{1}{2}$ BDT [§. 14. *Arith:*]. Igitur ATB = $\frac{1}{2}$ BDT [§. 81. *Arit:*]. *Q. erat unum.*

Eodem modo patet dimidium arcum BEG T esse mensuram anguli BTH.

COROLLARIUM I.

304. Cum anguli G mensura etiam sit dimidius arcus BDT, ipsius D verò arcus dimidius

midius BGT [§. 295.], angulus in majore segmento G æqualis eſt angulo minoris ſegmenti ATB, & angulus in minore ſegmento D æqualis eſt angulo majoris ſegmenti BTH [§. 48.].

COROLLARIUM II.

305. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF menſura ſemiſumma arcuum TB & TG à chordis cognominibus ſubtenſorum. Nam ATF = GTH [§. 140.]; ergo ejus menſura dimidius arcus TG [§. 303.]. Eſt verò anguli ATB menſura arcus dimidius TB [§. citt:]. Quare ſemiſumma eorundem arcuum eſt menſura anguli BTF.

COROLLARIUM III.

306. Si LM & MN ſint tangentes ex eodem puncto ductæ, erit angulorum MLN & MNL menſura arcus dimidius LN [§. 303.]; conſequenter anguli ipſi ſunt æquales [§. 49.]; & ideo LM = MN [§. 161.]. Tab: VIII. Fig: 100.

COROLLARIUM IV.

307. Quia angulorum L, M & N menſura eſt ſemicirculus [§. 207.]; angulorum verò L & N ſimul ſumptorum arcus LN [§. 306.]; erit anguli M à duobus tangentibus LM & NM menſura arcûs differentia intercepti LN à ſemicirculo KLNO; hoc eſt: erunt arcus LK & NO menſura anguli M.

PROBLEMA XXXVII.

Tab: VIII. Fig: 101. 308. *Inter duas lineas AB & BE mediam proportionalem BD invenire.*

RESOLUTIO.

I. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum [§.51.], dividanturqué bifariam in C [§. 180.].

II. Ex C intervallô ipsius AC describatur semicirculus ADE [§. 120.].

III. Ex B erigatur perpendicularis BD [§. 182.].

Dico esse AB: BD = BD: BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE *per constr:* erit angulus m = n [§.68.], & y utriqué triangulo ABD & ADE communis, Ergo o = z & y = x [§.213.]; quare △ ABD non solum ∽ △ ADE sed etiam ∽ △ BDE [§. 230.]; ac proinde quia △ ABD ∽ △ BDE, erit AB: BD = BD: BE [§. cit.]. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

309. Cùm sit AB: BD = BD: BE, ex data sagitta AB, & dimidia chorda BD invenitur diameter arithmeticè [§. 276. *Arith:*], vel geometricè [§226. *Geom:*].

SCHOLION.

310. *Advertatur ad problemata corollariis contenta, id quod ſemel monuiſſe ſufficit. Non exſcribuntur ea, ut brevitati conſulatur.*

Sit ex. gr. $AB = 80'''$, $BD = 300'''$, erit $BE\ 1125'''$; adeoque diameter $AB + BE = AE = 1205'''$. Seu fermè $1'2$.

COROLLARIUM II.

311. Quoniam △ BDE ∽ △ ABD, & △ ABD ∽ △ ADE *per demonſtr:* §. 308; erit etiam △ BDE ∽ △ ADE [§. 157.].

Patet adeo *△ rectangulum per lineam perpendicularem ex angulo recto in hypothenuſam demiſſam reſolvi in duo triangula inter ſe & toti ſimilia.*

COROLLARIUM III.

312. Cùm adeo ſit etiam AB: AD = AD AE [§. 230.]; ſi lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transferatur, factiſqué reliquis, ut in reſolutione problematis, erit AD media proportionalis quæſita.

COROLLARIUM IV.

213. Si ergo AB ſit unitas; erit BD radix ipſius BE, aut AD ipſius AE [§. 219. *Ar:*].

PROBLEMA XXXVIII.

314. *Inter duas lineas ab & bc invenire duas medias continuè proportionales.*

RE-

RESOLUTIO.

Tab. VIII. Fig. 103. I. Jungantur ab & bc ad angulum rectum & producantur indefinitè versus x & z.

II. Accipiantur deinde duæ normæ & unius normæ angulus d applicetur rectæ bx ita, ut *1mò* unum latus dm per a transeat, & *2dò* aliud latus do ipsam bz secet in e, & *3tiò* deniqué ut secundæ normæ uno latere applicato ad normam priorem in e, alterum latus transeat per c.

Erit bd prima, & be secunda media continuè proportionalis.

DEMONSTRATIO.

Triangula ade & dec rectangula, atqué db & eb ad bases ae & ec perpendiculares *per constr:* Ergo ab: db = db: eb | & db: eb = eb: bc (§. 308.); sunt itaqué bd & be duæ mddiæ continuè proportionales (§. 133. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

315. *Hoc est celebre Problema, de quo primus HIPOCRATES CHIUS ex mercatore naufrago insignis Geometra factus cogitavit tum, cum Oraculum Deliis remedii loco contra pestem duplicationem aræ, quæ cubica fuit, proponeret. Unde quemadmodum cubi duplicatio ita hoc Problema Deliacum vocatur. In cujus solutionem Platonis hortatu omnes Græciæ Geometræ summô studiô incubuêre. Quos inter ipse PLATO. HERON. Alexan-*

xandrinus, *APOLLONIUS Pergæus*, *ERATOSTHENES*, *PAPIUS Alexandrinus*, *SPORUS*, *MENECHMUS*, *ARCHITAS Tarentinus*, *PHILO Byzantius*, *PHILOPONUS*, *DIOCLES*, *NICOMEDES* (a) & *Recentiores VERNERUS. R. P. GREGORIUS à S. Vincentio è Soc: JESU*, *CARTHESIUS diversis modis mechanicis atque Geometricis solverunt.*

CARTHESIUS per plures normas, quot libuerit, etiam continuè proportionales inter duas datas modum inveniendi tradit. Ex omnibus verò Divini PLATONIS modum exscribere visum est, eò quod inter omnes sit facillimus. Mechanicus quidem, sed á periculo errandi, si normæ fuerint exactæ (§. 302.), *immunis. Geometrici modi pendent à Geometria sublimiori. Inter alios dabimus in analysi facilem modum per intersectionem duarum parabolarum, quem MENECHMUS laudatus invenit.*

THEOREMA XLVIII.

316. *Si chordæ HM & LI se mutuò secent in K; erit HK: LK = KI: KM.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam x = x & u = u (§. 296.), ideò HK: LK = KI: KM (§. 230.). *Q.e.d.* Tab: I. Fig: 14.

THEOREMA XLIX.

317. *Si fuerint duæ secantes GL & GM ex eodem puncto G ductæ; erit GM: GL = GN: GO.* Tab: VIII. Fig: 97.

(a) EUTOCIUS *in commentariis in lib* 2. *Archimedes de Sphæra & Cylindro.*

DEMONSTRATIO.

Angnlus x eſt utriqué triangulo GNO & GML communis; anguli GNO menſura eſt ſemiſumma arcuum NL & NO (§. 305.); ſed anguli GML menſura eſt ſemiſumma eorundem arcuum (§. 295.). Quare GNO = GML (§. 48.); igitur GM: GL = GN: GO (§. 230.). *Q. e. d.*

THEOREMA L.

Tab: VIII. Fig: 102. 318. *Si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ AD & AB, quarum altera circulum tangit, altera ſecat; erit tangens AD media proportionalis inter totam ſecantem AB & ejus portionem AC extra circulum.*

DEMONSTRATIO.

Angulus A eſt utriqué triangulo ACD & ABD communis. Angulus ADC = ABD (§. 304.); ideoqué AC: AD = AD: AB (§. 230.). *Q. e. d.*



CAPUT V.
DE FIGURARUM DESCRIPTIONE.

THEO-

THEOREMA LI.

319. *In parallelogrammis latera opposita sunt æqualia; et si in figura quadrilatera latera opposita fuerint æqualia, erit eadem parallelogrammum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum *per hypoth:* erit OP parallela ipsi NQ (§. 89.); consequenter ducta diagonali PN, erit x = o & n = m (§. 202.); adeoqué OP = NQ & ON = PQ (§. 159.). *Q. e. unum.* Tab: II. Fig: 24.

Quodsi OP = NQ & ON = PQ *per hyp:* cum etiam sit NP = NP, erit x = o & n = m (§. 159.); consequenter OP ipsi QN & ON ipsi PQ parallela (§. 203.); adeoqué OPQN parallelogrammum (§. 89.). *Q. e. alterum.*

THEOREMA LII.

320. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes æquales: anguli in iis diagonaliter oppositi sunt æquales: anguli verò ad idem latus oppositi duobus rectis æquantur; & duo latera simul sumpta sunt diagonali majora.*

DEMONSTRATIO.

In parallelogrammis ON = PQ & OP = QN (§. 319.), sed PN = PN. Ergo △ NOP = △ NQP (§. 159.). *Q. erat unum.* Fig: 24.

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ

&

& ON ipsi PQ parallela (§. 89.), anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O simul sumpti æquantur duobus rectis (§.202.). *Q.e.2dum.*

Quoniam angulus O + N = N + Q *per demonstr:* erit O = Q (§. 81. *Arithm:*), similiter quoniam Q + P = Q + N *per demonstr:* erit P = N (§. *citt: Arithm:*). *Q.e. tertium.*

Denique NO + PO > NP, & PQ + QN > PN [§. 169.]. *Q. erat quartum.*

COROLLARIUM.

231. Quodlibet igitur triangulum est dimidium parallelogrammi ejusdem baseos & altitudinis cum parallelogrammo [§. 74.].

PROBLEMA XXXIX.

Tab: II. Fig: 21. 322. *Figuras quadrilateras describere.*

RESOLUTIO.

1mò. pro quadrato.

I. In C erigatur perpendicularis CA [§. 216.] = CD.

II. Ex D & A intervallô ipsius CD fiat intersectio in B [§. 178.].

III. Ducantur AD & DB.

Aliter.

I. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipsi CD æquales [§. 216.].

II. Ducatur recta AB.

2dò.

2do. pro parallelogrammo rectangulo.

I. Jungantur MI & IK ad angulos rectos. Tab: II. Fig: 23.
II. Ex M intervallo ML = IK describatur arcus, & ex K intervallo KL = IM alius priorem intersecans in L (§. 173.).
III. Ducantur rectæ ML & KL.

3tio. Pro Rhombo & Rhomboide.

Jungantur rectæ datæ sub angulo dato & reliqua fiant, ut pro Rectangulo. Tab: II. Fig: 22. 24.

4to. Pro Trapezio.

Cum Trapezium in duo Triangula USR & URT per diagonalem resolvatur, datis lateribus trapezii & diagonali UR duo illa triangula construantur (§. 177.). Fig: 25.

D E M O N S T R A T I O.

Manifesta est ex (§§. 84, 85.) & sequentibus, item §. 319. 320. Ex. gr. 1mus modus describendi quadrati ita demonstrabitur. AC = CD = AB = BD *per construct:* Ductâ ergo diagonali AD patet esse C = B (§. 159.), sed C rectus *per constr:* ergo B etiam rectus (§. 127.); consequenter o & x, item y & m semirecti (§.208.); adeoqué o + y & x + m itidem recti. Quare figura est quadratum (§. 84.). *Q. e. d.*

T H E O R E M A LIII.

323. *Si peripheria circuli dividatur in partes* Tab: VIII. Fig: 104.

tes quotcunqué æquales, ducanturqué subtensæ AB, BC, CD, &c. figura circulo inscripta regularis est.

D E M O N S T R A T I O.

Cùm enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales *per hypoth:* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 270.); cumque anguli A, B, C, &c. æqualibus arcubus BC, CD, DE, EA, AB &c. insistant, ipsi quoqué æquales sunt (§. 296.). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 94.). *Q. e. d.*

P R O B L E M A XXXX.

324. *Invenire summam angulorum in quocunqué polygono.*

R E S O L U T I O.

I. Multiplicetur 180° per numerum laterum.

II. A producto subtrahatur 360°. Residuum est summa quæsita.

Ex. gr. Pentagonum 180°. *Hexag:* 180°

Pentagonum	Hexag:
180°	180°
5	6
900°	1080°
360°	360°
540°	720°

DEMONSTRATIO.

Quælibet figura ex assumpto in ea puncto F in tot triangula AFB, BFC, CFD &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c. per constr: si ergo 180° per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angulorum in dictis triangulis (§. 207.). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos polygoni, semper efficiunt 360° (§. 44.). Quodsi itaqué à facto supra invento subtrahantur 360°, summa angulorum polygoni relinquitur. *Q. e. d.* Tab: VIII. Fig: 105.

Aliter.

Cùm numerus triangulorum ABC, CAD, & DAE, in quæ resolvitur figura polygona per diagonales AC & AD ex puncto A ductas, à numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binariô differat *per constr:* si 180° multiplicentur per numerum laterum binariô imminutum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D & E. *Q. e. i. & d.* Tab: IX. Fig: 107. n. 1.

Ex. gr. Pentag: 180. Pro Hexag. 180

3	4
540	720

COROLLARIUM I.

325. Quodsi summa inventa per numerum laterum, seu quod idem est, per numerum angulorum dividatur, quotus est angulus Polygoni regularis (§. 94 *Geom:* & 276. *Arit:*).

SCHOLION.

326. *Potest quoque angulus Polygoni aliter inveniri, ut infra problemate XLII. Sequens tabula exhibet summam angulorum in figuris rectilineis quibuscunque, & quantitatem unius anguli in polygonis regularibus à trigono usque ad Dodecagonum* (§. 324.) *Construitur columna 2da continua additione* 180; *tertia verò columna numeris in columna 2da per numerum angulorum sive laterum divisis* (§. 325.). *Utimur hac tabula tum in figuris regularibus describendis, tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet instrumento ritè explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur ea quæ in tabula definitur. Ex. gr. Si in heptagono superet* 900.

Numer: late.	Summa angulorum	Ang: Figuræ regularis	Num: later.	Angulorum sum:	Angulus Figuræ.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1900	150

COROLLARIUM II.

327. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continuentur; anguli externi 1, 2, 3. 4, &c. cùm angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 129.), sed interni soli efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera demptis 4 rectis (§. 324.). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos, seu 360° Tab: VIII. Fig. 105.

Ex. gr. in pentagono.

Externi cum internis bis 5 recti = *10 rectis.* (§. 129.).

Interni soli bis 5 recti minus 4 rectis = *10 rectis* — *4 rectis* = *6 rectis (§. 324.). Proinde 10 R* — *6 R* = *4 rectis.*

PROBLEMA XLI.

328. *Dato Polygono regulari circulum circumscribere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Siquidem omnia polygoni latera æqualiter à centro distent, id quod ex æqualitate triangulorum CTS & TCN patet (§. 155.), duo quæpiam latera CO & CH bifariam per perpendiculares dividantur in N & S (§. 180.); ubi enim hæ se intersecant in T, punctum intersectionis erit centrum circuli polygono circumscribendi (§. 275 & 273.). Tab: VIII. Fig: 106.

COROLLARIUM.

329. Omnis ergo figura regularis eſt circulo inſcriptibilis (§. 104.).

PROBLEMA XLII.

Tab: VIII. Fig: 106. 330. *Invenire angulum A in polygono regulari.*

RESOLUTIO.

I. Dividantur 360° per numerum laterum.

II. Quotus iſte ſubtrahatur ex 180°.

Reſiduum erit angulus A Polygoni quæſitus. Ex. gr. in Hexag: 360: 6 = 60; & $180^{\circ} - 60 = 120$ quemadmodum (§. 326.) invenimus.

DEMONSTRATIO.

Siquidem quodlibet Polygonum regulare circulo inſcribi poteſt (§.328.), & ſicut ſe habent omnia latera ad unum latus; ita tota peripheria ad arcum uni lateri reſpondentem (§. 126. *Ar:*), reperietur (§. 276. *Arithm:*) arcus AB, ſi 360° dividantur per numerum laterum; qui erit menſura anguli m (§. 48.).

Porro △ ABT = △ FAT (§.155.), angulus igitur x = y (§. 161.), cum etiam ſit x = v (§. 164.); erit x + y = x + v (§. 78. *Arith:*); conſequenter cum omnes anguli in triangulo ſint 180° (§. 207.), ſi angulus

m

m, ſive arcus AB menſura anguli inventa ſubtrahatur ex 180°, reſiduum erit = x + v (§. 212.); hoc eſt *per demonſtr:* = x + y (§. 14. *Arit:*) = angulo polygoni dati A (§. 85. *Arit:*). *Q. e. d.*

THEOREMA LIV.

331. *Quadrilateri circulo inſcripti ACBD anguli bini oppoſiti C & D, item B & A conficiunt duos rectos.*

DEMONSTRATIO.

Inſiſtunt enim ſimul ſumpti integro circulo; adeoque ipſorum menſura eſt ſemicirculus (§. 295.), ſunt ergo duobus rectis æquales (§. 125.). *Q. e. d.* Tab: VIII. Fig: 95.

PROBLEMA XLIII.

Circulo quadratum circumſcribere.

RESOLUTIO.

I. Ducantur diametri AB & DE ſe mutuò in centro C ad angulos rectos ſecantes. Tab: I. Fig: 8.

II. Ex A, B, E, D intervallô radii fiant interſectiones in F, G, H, I.

III, Ducantur rectæ FG, GH, IH, & IF.

Erit FGHI quadratum circulo circumſcriptum (§. 84, 105.).

PROBLEMA XLIV.

333. *Super data recta ED polygonum regulare quodcunque describere.*

RESOLUTIO

Tab: VIII. Fig: 104. I. Quæratur angulus Polygoni (§. 325. 330.).

II. Fiat in E ipsi æqualis (§. 139.), & EA = ED.

III. Per puncta A, E, D describatur circuli peripheria (§ 275.).

IV. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri potest.

Ita describetur figura quæsita (§. 323. 329.).

Aliter.

I. In E & D fiant anguli dimidio anguli polygoni seorsim æquales (§. 139.), quorum crura EF & DF, se mutuò secabunt in F (§. 72.).

II. Ex F tanquam centro, radio EF describatur circulus, qui erit polygono circumscriptus (§. 328.).

III. Reliqua fiant, ut ante.

PROBLEMA XLV.

334. *Polygonum regulare quodcunque circulo inscribere.*

RESOLUTIO.

Fig: 104. I. Dividantur 368 per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 49.).

II.

II. Construatur is ad centrum (§. 139.).

III. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest.

Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 323, 105.). *Q. e. f. & d.*

S C H O L I O N.

335. *Resolutio problematis præsentis & præcedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem instrumentó transportatorió utamur; non tamen ideo contemnenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis ritè peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & quindecagoni constructionem dabimus in Analysi. Johan. Carolus RENALDINUS omnium polygonorum describendorum regulam Catholicam præscribit passim Geometriis practicis insertam, sed quantum fallat, in Analysi ostendemus.*

P R O B L E M A XLVI.

336. *Polygonum regulare quodcunqué circulo circumscribere.* Tab: VIII. Fig: 104.

R E S O L U T I O.

I. Inscribatur figura regularis similis circulo dato vg. Pentagonum (§. 334.).

II. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam Fh ad eandem in H normalem (§. 180.), quæ arcum cognominem in h secat.

III. Per A & B producantur radii Fa & Fb.

IV. Per h ducatur a b ipſi AB parallela radiis continuatis in a & b occurrens; erit ab latus unum polygoni circumſcripti (§. 105, 285.).

THEOREMA LV.

Tab: VIII. Fig: 106.

337. *Latus Hexagoni AB æquale eſt radio circuli circumſcripti AT.*

DEMONSTRATIO.

Angulus T = 60° (§. 48, 210.), ergo

A + B = 120° (§. 212.); conſequenter cum

AT = BT (§. 32.), A = B = 60° (§.

161.). Quare cum AB opponatur etiam 60° erit AB = BT (§.cit.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

338. Hexagonum regulare circulo inſcribitur, ſi radius ad peripheriam ſexies applicetur.

COROLLARIUM II.

339. Si ſuper linea data AB hexagonum deſcribendum; triangulum æquilaterum ABT conſtruitur (§. 175.). Eſt enim vertex T centrum circuli hexagonum quæſitum circumſcribendi (§. 337.).

PROBLEMA XLVII.

340.

340. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuscunque & tot diagonalibus, quot sunt latera demptis tribus, figuram construere.*

RESOLUTIO.

Cùm figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula, BAC, CAD, DAE resolvatur, quot sunt latera demptis duobus, non alia re opus est, quàm ut unum triangulum super altero excitetur (§. 177. 155.). Tab: IX. Fig: 107.

PROBLEMA XLVIII.

341. *Datis omnibus lateribus figuræ & tot angulis, quot sunt latera demptis tribus, figuram construere.* Tab: IX. Fig: 108.

RESOLUTIO.

I. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis.

II. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 139.), & latera AE & BC determinentur.

III. Fiat porro in C angulus conveniens (§. cit.); & determinetur latus DC &c.

IV. Tandem ex E & D fiat intersectio in F intervallô laterum EF & DF;

Ductis enim DF & EF figura terminabitur, eritque æqualis quæsitæ (§. 155. 146.).

Eôdem modô construi possunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 94.).

COROLLARIUM.

342. Si omnes anguli præter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur, opus non eſt.

SCHOLION.

343. *Tyrones ut ſe exerceant in figuris irregularibus deſcribendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus aſſumant. Quodſi contingat figuram non terminari; id indicio erit caſum eſſe impoſſibilem; adeoquè vel in angulorum vel in linearum quantitate quædam erunt immutanda.*

DEFINITIO XXXIX.

344. *Ichnographia* vocatur figura, quæ alicujus planæ ſuperficiei imaginem parvâ formâ ope ſcalæ delineatam exhibet.

PROBLEMA XLVII.

Tab: IX. Fig: 107. 345. *Areæ cujuſdam campeſtris rectilineæ abcde liberè permeabilis Ichnographiam perficere; hoc eſt figuram areæ campeſtri ſimilem deſcribere.*

RESOLUTIO.

I. Inquiratur in longitudinem ſingulorum laterum ab, bc, cd, de, ea, itemqué diagonalium ac & ad (§. 113.).

II. Conſtruatur figura ABCDEA (§. 340.) juxta ſcalam Geometricam (§. 237.).

Erit figura ABCDE ſimilis abcde figuræ campi (§. 344.).

DE-

DEMONSTRATIO.

△ △ enim DEA, DCA, CBA eôdem modô determinantur, quô & dea, dca, cba; etenim *e. g.* ab 6, & bc 7 pedum in campo exiſtentibus, etiam AB 6 & BC 7 pedum ponuntur in charta *per conſtr:* ſunt igitur omnia latera ſimilia, adeoqué & ipſa △ △ ſimilia (§. 230, 156.). Sed DEA + DCA + CBA = DCBAE; & dea + dca, + cba = abcde (§. 85. *Arithm:*); conſequenter ABCDE ∽ abcde (§. 156.). *Q. e. d.*

Aliter.

I. Poſitâ menſula in uno figuræ angulo, ut punctum a vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos, in ſingulis angulis BCDE defixos, ducanturqué lineæ indefinitæ ab, ac, ad, ae. Tab: IX. Fig: 109.

II. Inveſtigetur longitudo rectarum aB, aC, aD, aE &c. (§. 113.).

III. Exinde juxta ſcalam determinentur, ab, ac, ad, ae (§. 137.).

IV. Ducantur bc, cd, de.

Dico abcde eſſe ſimilem figuræ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Eadem cum præcedenti. *Niſi præterea propter imperitos agrimenſores volentes lineam fiduciæ omnino imminere ipſi lineæ in tabula ducendæ, demonſtrandum ſit id neceſſarium prorſus non eſſe, dummodo ponatur linea fiduciæ ipſi lateri Regulæ parallela.*

Sint

Tab: IX. Fig: 108. Sint enim *per hypothes:* lineæ fiduciæ bh, ge, oc &c. parallelæ ipsis AB, AE, BC; ductuqué iis parallelo describatur figura ABCD FE, erit ang: a = A (§. 320.); cùm verò sit b = o &, o = B (§. 202.), erit b = B (§. 77. *Arithm:*). Similiter v = E & v = e (§. 202.); ergo e = E, & ita porro. Omnes itaqué anguli erunt æquales. Consequenter cum mensuræ quoqué laterum AE & ae, EF & ef &c. omnes ponantur æquales *per operat:* erit ABCDFE & = & ∽ abcdfe (§. 155, 156.); si igitur abcdfe est ichnographia (§. 344.), est etiam ABCDFE ichnographia (§. 14. *Arithm:*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab: IX. Fig: 110. Mensulâ intra figuram positâ eligatur punctum f, ex quo per dioptras, ut antè, collineatio fiat in baculos in A, B, C, D, E G defixos, ducánturqué rectæ indefinitæ fa, fb, fc &c.

II. Investigetur longitudo rectarum fA fB &c. (§. 113.).

III. Inde determinetur longitudo rectarum fa, fb, &c. juxta scalam (§. 237.).

IV. Tandem ducantur ab, bc, cd, &c. Erit abcdeg ∽ ABCDEG (§. 156, 345.)

Aliter.

Tab: IX. Fig: 107. I. Collocato instrumentô Goniometricô in investigetur quantitas angulorum x, m, r, (§. 134.) & longitudo rectarum ab, ac, ad, & ae (§. 113.).

II. Construantur juxta scalam △ △ ABC, ACD, & ADE (§. 273, 162.).

Erit ABCDE ∽ abcde *per demonstr: superius datam.*

Aliter.

I. Collocatô instrumentô Goniometricô in f, investigetur quantitas angulorum, AfB, BfC, CfD &c. (§. 134.), & longitudo rectarum fA, fB, fC &c. (§. 113.). Tab IX. Fig: 110.

II. Construantur, ut antè, juxta scalam △△ bfa, afg, gfe, efd, dfc & cfb (§. 162.).

Eôdem modô demonstratur abcdeg ∽ ABCDEG (§. 156.).

Aliter.

I. Pyxis cum arcu Magnetica, cujus margo in 360° divisa, & quæ in cardine meridiei ac septemtrionis dioptris instructa ita collocetur in a, ut ejus centrum ipsi vertici anguli immineat, & per dioptras collineanti baculus in b defixus occurrat, noteturqué angulus declinationis acûs à linea meridiana Pyxidis ipsi a b imminente versùs ortum vel occasum. Tab: IX. Fig: 107. n 2.

II. Pyxidis dioptræ convertantur successivè ad baculos in c, d, &c. defixos; notenturqué, ut ante, in singulis casibus anguli declinationis à linea meridiana.

III. Investigetur longitudo rectarum ab, ac, ad, ae (§. 113.).

IV. Ducatur in charta recta ML, & assumpto in ea punctô A applicetur centrum instrumenti transportatorii, & fiant anguli i, x, m, r, angulis declinationum rectarum ab, ac, ad, ae æquales (§. 139.), atqué ex harum lon- n. 2.

longitudine per scalam determinentur AB, AC, AD, AE (§. 237.).

Dico figuram ABCDE esse alteri abcde similem.

DEMONSTRATIO.

Cùm in campo acus magnetica semper eidem lineæ respondeat in plano horizontali imaginario mundi, si eam repræsentet linea LM supra quam ex centro descriptus sit semicirculus fghkl, patet angulos $x = x$, $m = m$ $r = r$, & AB, AC, DA, EA eôdem modo determinata, quo & ipsa ab, ac, de, ea, per *constr:* igitur $\triangle\triangle$ CAB, DCA, DEA $\backsim$ $\triangle\triangle$ cab, dca, dea (§. 108.); consequenter ABCDE $\backsim$ abcde (§. 185. *Arithm:* 156 *Geom:*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

346. *Sed magna industria opus, ut exquisita & habeatur, & pòstmodùm ad usus applicetur acus magnetica, tum propter variabilitatem, tum propter declinationem, quam pro variis temporibus idque subinde in unam atque alteram partem immutat, adeò ut non immeritò celebris R. P. FOURNIER S. J. perhibeat:* (a) parùm admodum dari, quod Universale sit in Magnete; sed nihil in terris tam irregulare inveniri. *Videatur ea de re clarissimus Geometra Cæsareus JACOBUS MARINONI* (b), *ex quo loco notas ad quas acûs magneticæ apponere visum est, appareat, quantum iis fidendum sit, quæ passim circumferuntur.*

(a) *Hydrographie à Paris* 1667 *in fol: Livre* XI. *chap:* VIII. *p.* 404.

(b) *De Re Ichnographica L.* I. §. III.

1mo. Communis acuum & aptiſſima materia chalybs eſt, præſertim purgatus & carens rimis, ſpinis, aliiſqué partibus heterogeneis. Tab: IX. Fig: 112.

2dò. Conſultiùs aliqua craſſitie & latitudine donantur, quæ à capitello C incipiens utrinqué augentur uſqué ad extremitates, uberiore vi magnetica imbuendas, adeoqué vividiore directionis motu, cum à centro magis removentur, impellendas.

3tiò. Longitudo 4 imò 3 digitorum, non pauciorum tamen, ſufficiens eſt.

4tò. Modus affricandæ acûs magnete ex praxi, quam adhibuit circa ſuam acum laudatus Geometra, patebit. Ita enim l. cit: p. 13. ait: Acu aſſerculo lævigato modicum immerſâ, ut firma maneret, baſis ejus ſuprema duplici Magnete armato, ſimul perfricabatur; utrinqué ſcilicet à pileolo C uſqué ad extremitates B & D. Nempè boreali acûs ipſius parti CD applicatus erat pes, aut polus auſtralis alterutrius magnetis, ſimulqué auſtrali parti BC pes borealis alterius. Frictioni accedebat preſſio aliqua, & non ſine mora. Itaqué prope pileolum C, contigui erant ambo magnetes, deinde progrediendo ad extremitates & ultra magis ſubinde, magiſqué alter ab altero removebantur. Iterum eôdem modô ſimul applicabantur, & frictio uniformis ac ſimultanea 20 & pluribus vicibus repetebatur. Deinde convertendo acum, ut pileolus C in aſſerculi cavitatem deſcenderet, baſis altera tunc extans, utroqué magnete ſimul, & utrinqué totidem vicibus affricta fuit.

Hæc egit conſilium ſecutus Excellentis MUSCHENBROEKII MARINONIUS, ex-

per-

perientiâ tamen Magiſtrâ præmonet p. 52.

Certè quantumvis ſubtilitatis & induſtriæ impendatur, ut res ex voto ſuccedat, præter materiæ delectum, & idoneam affrictionem magnetis, pars etiam fortunæ non exigua requiritur.

Quoties itaquè opus habuerimus acu magneticâ, examinanda eſt primùm ad lineam meridianam accuratè inventam. Quodſi verò ab eadem declinet; angulus declinationis in ortum vel occaſum adnotandus, atquè in praxi pro exigentia addendus, aut ſubtrahendus ab angulo invento.

PROBLEMA L.

Tab: IX. Fig: 111. 347. *Ichnographiam areæ ABCDE ex duabus ſtationibus A & B perficere.*

I. Poſita menſula in A collineatio fiat in ſingulos areæ angulos B,C,D,E, ducanturquè rectæ versùs eos ex a.

II. Quæratur diſtantia ſtationum AB (§. 113.), & in menſulam ex ſcala geometrica transferatur in a b (§. 237.).

III. Menſula ex A deferatur in B ita, ut punctum cognomine b in ea deſignatum ipſi B reſpondeat, & regula ad lineam b a applicata per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat, atquè in eo ſitu tabulæ.

IV. Ex puncto b in ſingulos rurſus figuræ angulos collineatio fiat, & verſus eos rectæ ducantur, quæ priores lineas in e, d, c interſecant.

V. Deniquè jungantur puncta a & e, e & d, d & c rectis ae, ed, dc.

Dico

Dico ichnographiam esse absolutam.

DEMONSTRATIO.

Eadem, quæ præcedentis problematis.

Aliter.

I. Goniometricô investigetur quantitas angulorum EAD, DAC & CAB, itemqué ex B quantitas angulorum ABE, EBD & DBC; quæraturqué distantia stationum AB.

II. In charta tandem distantia ope scalæ; anguli ope instrumenti transportatorii determinentur.

PROBLEMA LI.

348. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.* Tab: IX. Fig: III.

RESOLUTIO

I. Mensula in A collocata collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis bae in eadem designari possit.

II. Longitudo utriusqué rectæ AB & AE per §. 113. explorata, transferatur ex scala in mensulam ex a in b, & e (§. 237.).

III. Mensula in B translocetur ita, ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat, & visus per dioptras collineantis baculum in A attingat.

IV. Idem visus dirigatur per easdem dioptras in C, ut, sicut ante, angulo ABC æqualis abc, & rectæ BC proportionalis bc in mensula designari possint.

V. Quodſi idem cum reliquis angulis & lateribus fiat; erit figura in menſula delineata areæ propoſitæ ſimilis. Goniometricô verò anguli & latera menſurata annotantur, & in chartam tandem latera ope ſcalæ per §. 237, anguli autem per §. 139 transferuntur.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in menſula delineatæ ſunt æquales ſingulis angulis areæ, & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſunt *per conſtr:* Figura igitur delineata eſt areæ ſimilis (§. 156. 153.).

Aliter.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 113.) & quantitas tot angulorum, quot ſunt latera demptis tribus (§. 134.). His enim datis Ichnographia per (§. 341.) vi demonſtrationis præcedentis abſolvetur.

SCHOLION I.

349. *His legibus non camporum modo, ſed Provinciarum quoque deſcriptio Geometrica continetur. Interim ſponte ſua manifeſtum, loca præ cæteris notatu digna vulgò uroczyſzcza ſignis aptis diſtingvenda, tum etiam ſcalam, ex qua linearum magnitudines aſſumebantur, figuræ ſubijciendam eſſe. Præterea ſitus plagarum mundi auxiliô acûs magneticæ ſatis probatæ indicandus. Reliqua bene multa huc ſpectantia, ſcilicet de deſcri-* ben-

bendis mappis per lineas ab intra ad perimetrum figuræ ductas, dequé colore induendis in praxi docebuntur.

SCHOLION II.

350. *Unum adhuc seriò commendandum. Ex officio ichnographiæ arearum operam daturus suarum dimensionum rationes non nudè documentis Juridicis subjiciat, sed postquam quantitatem superficiei, numerum terminorum limitum [vulgo Kopiec], Arborum terminalium [kleyny, zaciosy], distinctionem etiam terminorum, hoc est, utrum terminus lapideus [kopiec kamienny] vel terminus finalis sit [kopiec narożny]? atqué distantiam terminorum invicem expresserit, angulorum quoqué inclinationem in limitibus intra vel extra figuram, documentis iisdem Juridicis inserendam curet. Si enim vel duo tantùm termini limitum eg. lapidei persistant, habita distantia & angulis in terminis limitum, [omnibus etiam aliis limitibus injuriâ temporum collapsis] facilè Goniometricè anguli & latera figuræ inveniuntur in campo per §. 351; Ichnographia verò in charta per §. 348 perficitur.* Atqué ejusmodi limitum positio, dicitur positio limitum perpetuò durabilium.

PROBLEMA LII.

351. Figuræ in charta delineatæ similem in campo designare.

RESOLUTIO.

Quoniam hoc problema eſt inverſum alterius, quô ichnographias arearum inveſtigamus, non modo tot ejus dantur caſus, quot hújus commemoravimus, ſed & ipſius reſolutio ex reſolutionibus problematum immediatè præcedentium intelligitur. Ex. gr. ſi ſemicirculo, vel menſula vel pertica utimur, anguli ſinguli figuræ, aut anguli diagonalibus intercepti &c. in ſolo deſignantur per §. 139. & latera vel diagonales &c. per menſuram majorem decenter determinantur.



CAPUT VI.

DE FIGURARUM DIMENSIONE, ADDITIONE, SUBTRACTIONE, MULTIPLICATIONE, COMMUTATIONE, DIVISIONE.

PROBLEMA LIII.

352. *Invenire aream quadrati.*

RESOLUTIO.

I. Quæratur longitudo lateris (§. 113.).
II. Hæc ducatur in ſeipſam (§. 97. *Arit.*).

Fa-

Factum erit area quadrati. ex. gr.
Sit latus quadrati 345, erit area = 345. 345 = 119025.

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati investigans quærit, quot *eg.* digiti quadrati, hoc est: quot quadratula XZ digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 106.); evidens verò est, si latus quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales, & quadratum ipsum per rectas puncta divisionum connectentes in lateribus oppositis in quadrata minora divisum; tot esse quadratulorum XZ series, quot partes latus habet AB, & in qualibet serie reperiri tot quadratula, quot latus BC, vel idem AB habet partes; numerus ergo quadratulorum XZ invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q.e.d.* Tab: IX. Fig: 113.

COROLLARIUM I.

353. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§. 135. *Arithm:*). *Ex. gr. Quadratum lateris dupli est quadratulum quadrati lateris simpli, hoc est: si fuerit latus unum ad aliud, ut 1:2, erunt quadrata ut 1:4.*

COROLLARIUM II.

354. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100; cùm igitur chorda 10 sit perticarum, pertica 10 particularum &c. (§. 20.); chorda quadrata 100 perticas quadratas, pertica quadrata 100 perticulas quadratas, perticula qua-

drata 100 digitos quadratos &c. continet. (§. 106.).

COROLLARIUM III.

355. Quodsi itaque detur numerus in quadratis ultimæ speciei decimalibus, facilè is in perticas, perticulas &c. resolvitur, si à sinistra dextram versùs binæ notæ resecentur (§. 354.); quæ enim sinistram versùs residuæ notæ fiunt, integra erunt (§. 344. *Arithm:*)

Ex. gr. $\overset{''}{73480}$ *quadrati faciunt* $\overset{0}{7}$, $\overset{'}{34}$, 80 *hoc est: 7 chordas, 34 perticas,* & 80 *perticulas quadratas.*

COROLLARIUM IV.

356. Quodsi verò detur in rectangulis ultimæ speciei, facilè etiam in perticulas, perticas rectangulares cujusque speciei per §. 21. resolvitur. Ex. gr. $\overset{'''}{7348} = \overset{0}{7}\ \overset{'}{3}\ \overset{''}{4}\ \overset{'''}{8}$; id *est: septem chordæ, 3 perticæ, 4 pedes, & 8 digiti rectangulares.*

COROLLARIUM V.

357. Cùm verò numeri quadrati oriantur, si in se ducantur (§. 218. *Arithm:*), area autem est factum laterum (§. 352.), ut in quadratis ultimæ speciei decimalibus obtineatur area,

1mò. Fractiones eædem in utroque factore assumendæ, id quod zerorum adjectione, si opus fuerit, fiet. &

2dò.

2dò. Logarithmô eôdem factorum datorum ultima nota facti signanda.

Ex. gr. *Sit latus unum areæ* su $3^{\circ}, 3^{\prime} 4^{\prime\prime}$, *&* *aliud* sy $2^{\circ}, 2^{\prime}$ *sive* $2^{\circ}, 2^{\prime}, 0^{\prime\prime}$ (§. 344. *Arith:*), *erit area* $7348^{\prime\prime}0$, *hoc est: 73 millium & 480 perticularum quadratarum.* Tab: IX. Fig: 114.

COROLLARIUM VI.

358. Quoniam verò inventa area in rectangulis decimalibus foret $7^{\circ}, 3^{\prime}, 4^{\prime\prime}, 8^{\prime\prime\prime}$, aut 7. 3480 (§. 353. *Arithm:*), id quod habetur ex decupla progressione (§. 345. *Arith:*), quæ in quadratis in centuplam abit (§. 354.): igitur si *rectangulares sive oblongæ fractiones arearum in quadrata cujusque speciei dispe ceu læ sint:*

1mo. Incipiendo ab integris binas notas dextram versùs pro qualibet specie quadratorum resecentur. &

2dò. Logarithmô subduplô datorum unaquævis nota dextima è binis signanda; & si quidem fractiones numerô impares forent, zerus etiam ultimæ notæ adjiciendus.

Ex. gr. *In casu dato* $7^{\circ}, 3^{\prime} 4^{\prime\prime} 8^{\prime\prime\prime}$ *post adjectum zerum æquivalent* $7^{\circ}, 3^{\prime}, 4^{\prime\prime}, 8^{\prime\prime\prime}, 0^{iv}$ (§. 344. *Arith:*); *proindè erunt* $7^{\circ}, 34^{\prime}, 80^{\prime\prime}$. *hoc est, 7 chordæ*

chordæ, 34 perticæ, 80 perticulæ quadratæ, ut etiam §. 357. invenimus.

COROLLARIUM VII.

359. Et cùm $7.\ 348 = 7^{\circ}, 34^{\prime}, 80^{\prime\prime}$ (§. 358.); ipſa verò $7^{\circ}, 34^{\prime}, 80^{\prime\prime} = 73480^{\prime\prime}$ (§. 355.), erunt etiam $7.\ 348 = 73480^{\prime\prime}$ (§. 77. *Ar:*). Duo igitur conſequuntur:

1mò. Si quadrati in datis ſpeciebus in ultimam ſpeciem quadratorum commutandi; omiſſis omnibus aliis logarithmis ſub ultimæ ſpeciei tantùm logarithmo conjungendi ſunt. *Exemplum videatur* §. 355.

2dò. Si oblongi in ultimam ſpeciem quadratorum reſolvendi; ſiquidem fractiones pares forent numerô, ſubduplo logarithmo ultimæ ſpeciei notandus eſt numerus datus; ſi verò impares, zerus præterea adjiciendus. *Ex. gr.* $7^{\circ} 3^{\prime} 4^{\prime\prime} 8^{\prime\prime\prime}$, *ſive* $7^{\circ}, 3^{\prime}, 4^{\prime\prime}, 8^{\prime\prime\prime}, 0^{iv}$ *æquivalent* $73480^{\prime\prime}$, *hoc eſt: 73 millibus 480 perticulis quadratis.*

SCHOLION I.

360. *Hæ ſunt tricæ, æquæ miris modis agrimenſorum exercent ingenia. Duplici verò ex fonte emanant; ex ignorantia ſcilicet theoriæ arithmeticæ, præſertim fractionum, atque Geome-*

ometriæ. Cùm enim menſura arearum ſit quadratum (§. 106.), omnes fermè exterarum regionum Geometræ areas in menſuris quadratis definiunt, contrà omnibus pene Agrimenſoribus noſtris in menſuris rectangulis areas ſupputantibus. Nequé alio id modo factum exiſtimo, quàm modica Geometriæ notitiâ primorum in regione noſtra Agrimenſorum. Unde tandem longa conſvetudine menſuræ arearum rectangulares apud nos uſqué hodie obtinent. Ex collatione itaqué menſurarum rectangularium cum quadratis lites, & cum iis errores graviſſimi in plaſita agrimenſorum irrepsére. Cujuſmodi ſunt Axiomata illa.

I. Factorum & producti eadem eſt ratio.

II. Simile in ſimile ductum ſimiliter producit ſimile.

III. Simile in ſimile ductum diverſimode producit diverſum. &c. & *illa theoremata.*

I. Linea in lineam ducta ſimpliciter producit vel lineam vel ſuperficiem.

II. Linea in lineam ducta non juncta orthogonaliter producit lineam.

III. Linea in ſuperficiem ducta ſimpliciter producit vel ſuperficiem, vel cubum. &c.&c. *quæ tædet referre.*

Quidam eorum per calculum ſuum, ſeu ut ipſi vocant, per algorithmum decimalē *aream,*
v o
o /
cujus latera forent 24,5 & 2,4, inveniunt 588 hoc eſt: chordarum quingentarum octoginta octo; quod omnino falſum eſt; nam area vera
o / // // /
eſſet 58. 80, aut 58 8 o, aut 5880, aut 588

in

in rectangulis (§. 353. *Arith:*); *vel etiam* $\overset{0}{5}8$, $\overset{\prime}{8}0$, *aut* $58\overset{\prime}{8}0$ *in mensuris quadratis* (§. 357, 359.). *Satius itaque prius theoriæ Mathematum, quàm agris metiendis darent operam, ne labore improbo tantam sibi notam adspergerent, & fundi Dominis gravissimo damno forent.*

SCHOLION II.

Tab: IX. Fig: 114. 361. *Ut specimen aliquod eorum afferamus, quæ* §§. *142, 343 commendavimus, ipsa in area numeri assumpti 7. 348 hunc in modum examinabitur theoria.*

I. Id quod asseritur §. 356: datus numerus in rectangulis decimalibus &c. *manifestum est ex lege fractionum decimalium* (§. 345. *Arithm:*). *Cum enim chorda una abcd contineat in se 10 perticas rectangulares ebdf, & una ebdf 10 alias minores epqo, & ita porro;*

Erunt $\overset{0}{7}\ \overset{\prime}{3}\ \overset{\prime\prime}{4}\ \overset{\prime\prime\prime}{8} = 734\overset{\prime\prime\prime}{8}$ (§. 97. *Arithm:*). *Q. e. unum.*

7 chordæ sunt in A, B, C, D, E, F, G, H, I, K.
3 perticæ rectangulares in LM iklmn &c.

Nam quoniam l est æquale vxu4, erunt 6l, sive iklmno = 6vxu4. consequenter 4vxu4 & 6vxu4 erunt 10vxu4, hoc est pertica rectangularis una, sive 3tia, siquidem in L sunt duæ. Perticulæ 4 sunt in N. 8 denique rectangulæ lineæ sunt in P. *Q. e. secund.*

II.

II. Quadrata cujusqué speciei *1mò* chordæ quadratæ 6 in A,B,C,D,E,F.&7ma in G,H,I,K, *2dò* Perticæ quadratæ 34 sunt in L, i, k, l, m, n, o & M, N. Quod enim $\overset{''}{1}$ oblonga eg. ep qo æquivaleat $\overset{'}{1}$ quadratæ qr, *& hic per numerum 1mum, & per* §. 345. *Ar:* patet. *3tiò.* Eôdem modô patet 8 tertia oblonga abire in 80 secunda quadrata.

Cum enim $\overset{'''}{1}$ sit pars millesima chordæ (§. 345. Arithm:); siquidem ponuntur $\overset{iv}{8}$ longitudinis chordæ, æquivalebunt $\overset{'''}{8}$ oblonga $\overset{'''}{8000}$ quadratis (§. 362.); adeoqué divisa per 100 efficient $\overset{''}{80}$ quadrata (§. 195. Arithm:). Q. e. tertium.

PROBLEMA LIV.

362. *Invenire aream rectanguli, suxy.*

RESOLUTIO.

I. Investigetur longitudo laterum su & sy (§. 113.);
II. Ducatur su in sy.
Factum erit area rectanguli.

Ex. gr. Sit su $= \overset{o}{3}\ \overset{'}{3}\ \overset{''}{4}$

sy $= \overset{o}{2}\ \overset{'}{2}\ \overset{''}{0}$

6680

6680
668
———

Erit area quadratorum $7348\overset{\prime\prime}{0}$ (§. 357.)

vel $\overset{iv}{7}3480$ linearum rectangularium.

vel $\overset{o}{7},\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{4}\overset{\prime\prime\prime}{8}$.

vel $\overset{o}{7},\overset{\prime}{34},\overset{\prime\prime}{80}$ (§. 356 & 359.).

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ problematis præcedentis & præter §§. citatos (§. 353. *Arithm:*).
Quia tamen mensura arearum est quadratum, missis aliis, quæ lineis indicandis aptissimè inserviunt, formulis eg. $\overset{o}{7}\,\overset{\prime}{3}\,\overset{\prime\prime}{4}\,\overset{\prime\prime\prime}{8}$ *&c.* (§. 19. & 20.), *hac* $\overset{o}{7},\overset{\prime}{34}\,\overset{\prime\prime}{80}$ *expressione quantitatis arearum in posterum utemur.* (§. 106.).

COROLLARIUM I.

Tab: IX. Fig: 114. 363. Igitur rectangula eg: sd & dy sunt in ratione composita suorum laterum videlicet st & sc, item cd & cy; hoc est erit Rect: sd : dy = 200 : 20 (§. 135. *Arith:*).

COROLLARIUM II.

364. Si ergo fuerint tres lineæ continuè proportionales; Quadratum mediæ rectangulo,

gulo extremarum eſt æquale (§. 270. *Arit:*).

COROLLARIUM III.

365. Si vero fuerint 4 rectæ proportionales; rectangulum ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis (§. 269. *Arit:*).

COROLLARIUM IV.

366. Quare ſi ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB ſecat; erit quadratum tangentis AD rectangulo ſub ſecante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 318, 364.). Tab: VIII. Fig: 102.

COROLLARIUM V.

367. Si duæ vel plures ſecantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur; erunt rectangula ſub totis, & earum portionibus extra circulum æqualia (§. 317, 365.), hoc eſt erit GMGO = GLGN (§. 60. *Arith:*). Tab: VIII. Fig: 97.

COROLLARIUM VI.

368. Si duæ chordæ HM & LI ſe mutuò ſecent in K; erunt rectangula ſub ſegmentis inter ſe æqualia (§. 316, & 365.), id eſt HK KM = LK KI (§. 60. *Arit.*). Tab: I. Fig: 14.

COROLLARIUM VII.

369. Si lignorum ſtrues metiretur *ex. gr.* pedibus, & orgyæ area (quæ quadrati aut rectanguli figuram habet) metiretur etiam pe-

dibus,

dibus, per orgyæ aream ſi area ſeu factum ex longitudine in latitudinem ſtruis dividatur; quotus indicat, quot ipſa orgyas contineat. (§. 61. *Arith:*).

Ex. gr. Si area ſtruis eſt 180 pedum, & area orgyæ 36 pedum, (§. 380. *Ar:* & 352. *Geom:*) *eſſet* 180: 36 = 5. Eſſet ergo area ſtruis lignorum 5 orgyarum quadratarum.

S C H O L I O N.

370. *Praxi geometricæ operam daturus noſſe præterea debet, quot chordæ ſecundum morem provinciæ manſum conſtituant.* Włoka Litewſka ma w ſobie morgow 30. Morg ſznurow 3. Będźie zatym miała włoka Litewſka ſznurow 90, poſpolićie zaś 3 wſzerz, a trzydźieśći ſznurow wdłuż; ſznur jeden zaś śię dźieli ná 10 prętow, pręt ná pręćikow 10, pręćik na 10 ławek, albo raczey linii, ponieważ ſznur jeden ma łokći w ſobie Litewſkich Wileńſkich 75, pręt będźie miał łokći $7\frac{1}{2}$. Pręćik $\frac{3}{4}$ łokćia, albo 3 cwierći. Linia $\frac{3}{40}$ łokćia, albo cal $1\frac{4}{5}$ (§. 276 *Arit:*) &c.

Będźie zatym włoka Litewſka miała łokći kwadratowych 506250. ſtop zaś kwadrat. 2,025,000; bo wſzerz ſznury trzy czynią łokći 225, wzdłuż ſznurow 30 czynią łokći 2250.

2250. Morg zaś jeden łokći 16875. ſznur łokći 5625. &c. *Sed utinam aliquando leges Patriæ certi aliquid de menſuris definirent; præter eas enim inveniuntur in bonis quibuſdam quēadmodum ex antiquis, ut vocant, documētis conſtat menſuræ agrorum* ſłużba, żerebia &c. *ſic dictæ; de quibus ex Jure Lithvaniæ nihil certi haberi poteſt.*

Accuratius ea res legibus Poloniæ definita, quas collegit inſignis Geometra R. P. SOLSCIUS S. J. *Videatur ergo is ſub titulo* Geometra y Architekt Polſki *Zabawy XI. Rozdźiał V. & ſequent:* p. 144.

THEOREMA LVI.

371. *Duo parallelogramma ABDC & E CDF ſuper eadem baſi CD & inter eaſdem parallelas AF & CD conſtituta ſunt inter ſe æqualia.* Tab: XI. Fig: 115.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemqué EF & CD ſunt latera oppoſita parallelogrammi *per hypoth:* erit AB $=$ CD & EF $=$ CD (§. 319.); conſequenter AB $=$ EF (§. 77. *Ar.*), & hinc porro AE $=$ BF (§. 78. *Arithm:*). Quoniam porro AC $=$ BD & CE $=$ DF (§. 319.), erit $\triangle$ ACE $=$ $\triangle$ BDF (§. 159.), adeoqué ABGC $=$ FEGD (§. 81. *Arith:*); conſequenter ABDC $=$ CEFD (§. 78, *Ar:*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

372. Ergo & triangula ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas æqualia ſunt. Nam parallelogrammum ACDB = parall: ECDF (§. 371.), ſed △ ACD = $\frac{1}{2}$ parall: ACDB & △ FCD = $\frac{1}{2}$ parall: ECDF (§. 320, & 321.). Ergo △ ACD = △ FCD (§. 155).

COROLLARIUM II.

373. Quoniam FH eſt altitudo tam parallelogrammi CEFD, quam △ CFD (§. 197.), AC verò ejuſdem parallelogrammi & △ EFC, item parallelogrammi ABCD, ſitqué AC = FH (§. 196.), patet adeo *Parallelogramma & triangula ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis æqualia eſſe* (§. 371. 362.).

PROBLEMA LV.

Tab X. Fig. 116. 374. *Invenire aream Rhombi & Rhomboidis, ſeu parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

I. In CD pro baſi aſſumptam demittatur perpendiculum AE (§. 187.), quod erit altitudo parallelogrammi (§. 197.).

II. Multiplicetur baſis per altitudinem.

Ex. gr. Sit CD = 456

AE = 234 ′′

1824

1 8 2 4
1 3 6 8
9 1 2

———————

$10^{\circ}, 67', 04''$

D E M O N S T R A T I O.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo ſuper eadem baſi CD & ejuſdem altitudinis AC, HF (§. 373.), ſed area rectanguli æquatur facto ex baſi in altitudinem (§. 362.). Ergo eidem æqualis eſt area parallelogrammi obliquanguli (§. 77. *Arithm:*). *Q. e. d.*

Tab: X. Fig. 116, 115.

C O R O L L A R I U M I.

375. Parallelogramma ſunt in ratione compoſita altitudinum & baſium (§. 135. *Arit:*), adeoqué & triangula eorum dimidia (§. 321.) in eadem exiſtunt (§. 155. *Arit:*).

C O R O L L A R I U M II.

376. Ergo ſi altitudines ſint æquales, baſium, ſi baſes ſint æquales, altitudinum rationem habent (§. 155. *Arith:*).

C O R O L L A R I U M III.

377. Parallelogramma æqualia baſes & altitudines reciprocant (§. 271. *Arith:*).

C O R O L L A R I U M IV.

Tab: X. Fig: 115.

378. Facilis ergo parallelogrammorum æqualium commutatio data alterius basi vel altitudine. Ex. gr. *Sit AC = 6 pedum, CD altitudo = 4. Sit alterius parallelogrammi basis CE = 8 pedum, quæratur altitudo EL sitque = X; siquidem æqualia debent esse parallelogramma,*

Erit $4.6 = 8.x$ *proinde*
$8:6 = 4:3$ (§. 271. *Arith:*). *Erit ergo EL = 3 pedibus.*

PROBLEMA LVI.

Tab: X. Fig: 117.

379. *Invenire aream trianguli.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

I. Multiplicetur basis AB per altitudinem CA, erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 362.).

II. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 321.).

Aliter.

Basis dimidia $\frac{1}{2}$ AB multiplicetur per altitudinem CA, vel basis AB per altitudinem dimidiam $\frac{1}{2}$ CA. Factum erit area trianguli. Nam hoc etiam modo dimidium parallelogrammi obtinetur (§. 321, 362.).

COROLLARIUM I.

380.

380. Hinc facilis $\triangle$ in parallelogrammum commutatio.

Erit enim $\triangle$ ACB = parallelogrammo ACFG, vel ADEB. & è contra parallelogrammum in triangulum commutabitur, ſi dimidium ſumatur.

C O R O L L A R I U M II.

381. Triangula æqualia baſes & altitudines dimidias (§. 271. *Arithm:*); conſequenter etiam baſes & altitudines integras reciprocant (§. 153. *Arit:*).

C O R O L L A R I U M III.

382. Hinc $\triangle$ unum in aliud alterius baſis, vel altitudinis commutari poteſt (§. 378.).

C O R O L L A R I U M IV.

383. Si area trianguli per baſim dimidiam dividitur, quotus eſt altitudo (§. 184. *Arith:*).

P R O B L E M A LVII.

384. *Invenire latus quadrati parallelogrammo vel triangulo dato æqualis.*

R E S O L U T I O.

Quæratur inter baſim & altitudinem parallelogrammi, vel inter dimidiam baſim & altitudinem, aut integram baſim & dimidiam altitudinem trianguli media proportionalis per §. 308, aut in numeris per §. 274. *Arit:*

Ita prodit latus quadrati quæſitum, ſuper quo ſi excitetur quadratum, erit parallelogrammo vel △ æquale.

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex baſi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 362, 374). Factum ex dimidia baſi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in baſim aream trianguli (§. 379.); cùm adeò quadratum lineæ, numeri reperti ſit in utroque caſu facto æquale (§. 364, & 270. *Arithm:*); erit quadratum iſtud in priori caſu parallelogrammo, in poſteriori triangulo æquale. *Q. e. d.*

PROBLEMA LVIII.

385. *Invenire aream polygoni irregularis ac trapezii.*

RESOLUTIO.

Tab: X. Fig: 118. n. 1. I. Reſolvatur per diagonales AD & AC in triangula.

II. Inveniantur areæ ſingulorum triangulorum (§. 379.).

III. Et addantur.

Erit ſumma areæ quæſita (§. 85. *Arith:*)

Tab: X. Fig: 119. Quodſi $\frac{1}{2}$ CE multiplicetur per ſummam altitudinum DF + GA; vel integra CE per $\frac{1}{2}$ (DF + AG): prodibit area Trapezii DC.

Ex.

Ex. gr. $DF = 35'$, vel $\frac{1}{2}EC = 43'$

$GA = 45'$, $DF + GA = 80'$

$DF + GA = 80'$ $AEDC = 34^{0}, 40'$

$\frac{1}{2}(DF + GA) = 40'$

$CE = 86'$

$AEDC = 34^{0},40'$

Similiter si in Trapezio fuerit AB ipsi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 196, 197.); consequenter Trapezii area habetur ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 379.). Tab: X. Fig: 120.

Ex. gr. Sit $AB = 246''$, $CD = 378$, BF 195;

erit $\frac{1}{2}(AB + CD) = 312''$

$BF = 195''$

1560
2808
312

 6,08,40.

$\overset{o}{6},\overset{\prime}{08},\overset{\prime\prime}{40}$.

COROLLARIUM I.

386. Trapezium ergo parallelorum laterum æquale eſt triangulo, cujus baſis eſt ſumma parallelorum laterum, & altitudo eadem trapezii (§. 379.), adeoque in illud commutari poteſt.

Et è contra ſi trianguli baſis pars quædam, dummodo non dimidia, pro uno, & pars altera pro altero latere parallelo trapezii, ſervata eadem altitudine trianguli, ponatur, triangulum in trapezium migrabit.

COROLLARIUM II.

387. Hinc facilè trapezia in rectangula (§. 380.), imò in quadrata (§. 384.) commutantur.

COROLLARIUM III.

388. Quodſi verò baſes omnes triangulorum, in quæ reſolvitur polygonum irregulare, ſumantur pro baſi una, & areæ triangulorum inventorum pro area unius alicujus ſimilis trianguli (§. 85. *Arithm:*), illius altitudo habebitur; ſi per dimidiam ſummam baſium inventorum triangulorum dividatur area eorundem (§. 383.); adeoque quodlibet polygonum irregulare poteſt in triangulum commutari. Data enim baſi & altitudine trianguli omnis generis etiam datorum angulorum triangulum conſtrui poteſt per §. 372.

Qu

Quodsi etiam per assumptam pro arbitrio basim dividatur area; prodibit etiam altitudo rectanguli (§. 184. *Arit:*).

COROLLARIUM IV.

389. Convertetur ergo polygonum irregulare in triangulum vel rectangulum, jam verò rectangulum vel triangulum in quadratum (§. 384.); ergo polygonum irregulare etiam in quadratum converti potest (§. 77. *Arithm:*). Figurarum commutatio.

THEOREMA LVII.

390. *In parallelogrammis & triangulis similibus altitudines sunt lateribus homologis proportionales; & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.*

DEMONSTRATIO.

Cùm altitudines AE & ae sint ad bases CD & cd perpendiculares (§. 197.), erunt E & e anguli recti (§. 67.); adeoque æquales (§. 127.). & quia parallelogrammum ABDC ipsi abdc, & triangulum CAD ipsi cad simile *per hypoth:* erit C = c & A = a (§. 153.). Quare AC: AE = ac: ae (§. 230.). Est verò etiam AC: CD = ac: cd (§. citt:). Ergo AE: CD = ae: cd (§. 171. *Arithm:*). *Q. e. unum.* Tab: X. Fig: 116.

Quoniam △CAE ∽ cae *per demon: & hyp:* erit AC : CE = ac: ce (§. 153.). Est verò etiam AC: CD = ac : cd (§. citt:); ergo

CE: CD = ce : cd (.171. *Ar:*);adeoq;
ED:CE = ed: ce (§.168. 144. *Arith:*).Q.
e. alterum.

Eôdem modô generaliter patet recta quascunque in figuris similibus eôdem modô determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.

COROLLARIUM I.

391. Quoniam parallelogramma & triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 375.), similia verò habent bases altitudinibus proportionales (§. 390.); igitur parallelogramma & triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 135. *Arithm:*). Et eôdem modô patet quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos; imò linearum eôdem modô pro arbitrio determinatarum (§. citt:).

COROLLARIUM II.

392. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum & segmentorum basium homologorum, nec non linearum eôdem modô,ut libet determinatarum (§. 353.).

THEOREMA LVIII.

Tab: X. Fig: 121. 393. *In parallelogrammo AD complementa DO & AO eorum, quæ circa diametrum existunt, sunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

△ enim ACB = △ BCD, & △ BLO = △ BOI, & △ OEC = △ OCf (§. 320.). Quare ACB — BLO — OEC = BCD — BOI — OCf (§. 81. *Arithm:*), hoc est: AO = OD. *Q. e. d.*

PROBLEMA LIX.

394. *Rectangula & quadrata sibi addere, aut unum ex alio subtrahere.*

RESOLUTIO.

Ex. gr. Sint addenda sibi rectangula AL & MN. Tab: X. Fig: 122. 123.

I. Jungatur altitudo altitudini in ML, & basis basi in LN.

II. Protendatur NF in G, ut fiat altitudini alterius rectanguli LI æqualis.

III. Ducatur diagonalis LG, &

IV. Per punctum intersectionis S ducatur OP parallela ipsi IL (§. 219.).

Erit APOK = AIKL + MN (§. 393.).

Sit subtrahendum quadratum bd ex rectangulo AIKL.

Similiter.

I. Ponatur bd intra rectangulum AL ita, ut altitudo altitudini, & basis basi conjungatur. Tab: X. Fig: 121.

II. Protendatur bc in e, donec basi alterius rectanguli sit æquale, &

III. Cætera, fiant ut ante.

Erit AIKL — bd = AI st (§. 393.).

SCHO-

SCHOLION.

395. *Facile patet parallelogramma quoque posse sibi addi & subtrahi, sed curandum primò, ut anguli homologi utrisque, sint æquales; id quod obtinetur per theorema LVI §. 371.*

COROLLARIUM.

Figurarū Additio & Subtractio. 396. Cùm triangula & polygona in parallelogramma & quadrata commutari possunt (§. 389.), quævis figuræ sibi addi & subtrahi possunt, si per prius convertantur in quadrata aut parallelogramma.

Ad praxim commodè applicaretur problema, gdyby trzeba było zamianę dawać za szachownice w jednym polu.

THEOREMA LIX.

Tab. VIII. Fig. 104. 397. *Figura regularis ABCDE ex centro circuli circumscripti F in triangula æqualia & similia resolvitur; & area ejus æqualis est triangulo, cujus basis peripheria totius polygoni AB + BC + CD &c. altitudo perpendiculum FG ex centro F in latus unum AB demissum. Idem valet de area circumscripti nisi quod altitudo sit radius.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB = BC = CD = DE = EA (§. 94.), & FA = FB = FC = FD = FE (§. 32.), triangula AFB, BFC &c. æqualia & similia sunt (§. 159.). *Q. e. unum.*

Con-

Conſtituantur triangula AFB, BFC, CFD &c. in quæ reſolutum eſt polygonum ſuper eadem recta AZ (§. 176.). Erigatur in A perpendicularis Af (§. 216.) ipſi altitudini triangulorum æqualis. Tab: X. Fig: 125.

Erit AfB = AFB, BfC = BFC, CfD = CFD &c. (§. 373.); conſequenter AfZ = AFB + BFC + CFD &c. (§. 85. *Arit:*) æqualis areæ polygoni regularis (§. 77. *Ar.*). *Q. e. ſecundum.*

Cùm recta Fg ex centro F ad contactum g ducta ſit radius, & ad latus ae perpendicularis (§. 289.), erit ea altitudo trianguli aFe (§. 197.). *Q. e. tertium.* Tab: VIII, Fig: 104.

PROBLEMA LX.

398. Invenire aream polygoni regularis.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Inveniatur vel per §. 385. vel Tab: VIII. Fig: 104.

I. Latus polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum; ex. gr. latus hexagoni per tria, ut prodeat ſemiperimeter, ſeu dimidia baſis polygoni.

II. Factum porrò ducatur in perpendiculum GF ex centro circuli circumſcripti in latus AB demiſſum.

Ita prodit area quæſita (§. 379.).

Ex. gr. AB = 54′

Dimidius numerus laterum $2\frac{1}{2}$

	27
	108
	′
Semiperimeter =	135
	′
Latus FG =	29
	1215
	270
	° ′
Area Pentagoni =	39,15

THEOREMA LX.

Tab IX. Fig. 107. 399. *Quadrilatera & polygona similia tam regularia, quam irregularia ABCDE & abcde per diagonales AC, AD & ac, ad in similia triangula ABC & abc, ACD & acd &c, dividuntur inter se & totis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Cùm ABCDE & abcde sint similes *per hypoth:* anguli A & a æquales (§. 153.); sed præterea diagonales AC, AD & ac, ad ex angulis æqualibus A & a ad æquales etiam D & d ducuntur, adeoqué △ △ ABC & abc, CAD & cad, DAE & dae eôdem modô determinantur (§. 107.); consequenter & inter se similia sunt, & similes partes figurarum existunt (§. 108, 156, & §. 8. *Arithm:*). *Q. erat primum.*

Cùm verò sit etiam.

ABCDE:

ABCDE: △ ABC = abcde: △ abc &c.
ABCDE: △ DCA = abcde: △ dca &c.
(§. 145. *Ar:*), erunt △△ dicta totis proportionalia. *Q. e. 2dum.*
Consequenter ABCDE:abcde = △ABC:△abc & ABCDE: abcde = △DCA:△dca (§. 148. *Arith:*), igitur
△ ABC: △ abc = △ DCA: △ dca = △DAE: △ dae (§. 141. *Arit:*), hoc est: △△ ABC, ACD, ADE & abc, acd, ade sunt inter se proportionalia (§. 132. *Arithm:*). *Q. e. tertium.*

Eadem est demonstratio pro regularibus polygonis.

THEOREMA LXI.

400. *Figuræ similes sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum; sive ut quadrata laterum homologorum.*

DEMONSTRATIO.

Sint Figuræ ABCDE & abcde sive regulares sive irregulares similes, eæqué sive quadrilateræ sive polygonæ quæcunqué ejusdem ordinis; erit: ABCDE: abcde = △ ABC: △ abc = △ ACD: △ acd (§. 399.), sed △ ABC: △abc $= AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ &c. (§.392.), ergo ABCDE: abcde $= AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ &c. (§. 141. *Arithm:*). *Q. e. d.* Tab: IX. X. Fig: 107. 118.

SCHO-

SCHOLION.

401. *Eódem modó oſtenditur figuras rectilineas ſimiles eſſe in ratione duplicata diagonalium ex angulis æqualibus ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eódem modó intra eas determinatarum* (§. 156.). *Dicere veró in ratione* duplicata, ſive figuras ſimiles eſſe inter ſe, ut quadrata laterum homologorum, idem ſonat (§. 353.).

COROLLARIUM I.

402. Cùm ſcalæ omnes geometricæ ſint ſibi ſimiles (§. 21. *Arithm:*), quavis ſcala figuræ datæ ſimilis deſcribetur. Facilè igitur eſt figuras quasvis, mappas etiam augere vel minuere in ratione duplicata; ſcalis enim tantum opus eſt duplis, triplis &c. ut latera & diagonales mapparum duplicentur, triplicentur &c. *Ex. gr. Si fuerit ſcala una ad alteram, ut* 2: 1, mappa prior ad poſteriorem erit, ut 4: 1, & ſi, ut 4: 1, + erunt mappæ ut 16: 1. ſi ſcala priore ſeu ſimplâ utaris.

COROLLARIUM II.

403. Quodſi itaqué dupla, tripla, &c. prioris mappa deſcribenda ſit, apparebit, quot phyluris chartæ opus ſit pro ſpatio ſcilicet, quod occupabit.

Ex. gr. Si ex phylura in quartam partem phyluræ mappa transferenda ſit; aſſumatur ſcala ſubdupla prioris, nam erit prior ad poſteriorem ut 4: 1 (§. 400.).

CO-

COROLLARIUM III.

404. Quodſi in quacunqué data ratione augendæ vel minuendæ figuræ ſimiles. *Ex. gr.* Si petatur △ dati y ſimile, ſed triplum z; inveniatur inter dati trianguli baſim d, & ejus triplam g, media proportionalis (§. 308.), ſuper qua ſi conſtruatur △ ſimile dato z (§. 220.), erit hoc triplum dati △ y. Nam quia d: f = f: g *per hypoth:* (§. 329. *Methodi Mathemat:*), erit d: g = dd: ff (§. 190. *Arithm:*), ſed etiam y: z = dd: ff (§. 400.); conſequenter y: z = d: g (§. 141. *Arith:*), cum igitur ſit d: g = 1: 3 *per conſtr:* erit etiam y: z = 1: 3 (§. 128. & 141. *Arith:*). Tab: X. Fig: 126.

Figurarum multiplicatio & diviſio.

COROLLARIUM IV.

405. Pro polygonis irregularibus multorum laterum, & pro mappis augendis vel minuendis, potius ſuper media proportionali inter latera duo homologa, vel diagonales, aut inter ſcalas inventa, ſcala conſtruatur, & juxta data vel aſſumpta prioris ſcalæ latera & diagonales figura deſcribatur. *Ex. gr. ſi inter CD & ejus triplam CL inveniatur media proportionalis, ſuper qua conſtruatur* ſcala, erit prior mappa ſcalâ CL deſcripta ad poſteriorem ut 1: 3 (§. 402, 404.), ſi utriqué mappæ ſcalam ſimplam CL ſubjeceris. Tab: IV. Fig: 67.

Unde etiam innoteſcit quantitas chartæ, qua ſcilicet opus, ut mappa duplô, triplô &c. major data evadat.

SCHOLION.

406. Mappa augenda, vel minuenda vocatur reducenda; altera verò ad quam reductio fieri debeat, reducta appellatur. *Reducuntur quoq; mappæ ad majores, vel minores per parallelogrammum graphicum* Celeberrimi R. P. CHRYSTOPHORI SCHEINERI è S. J. *ineunte sæculo præcedente inventum atque descriptum in eximio libello* (a), *cujus fabricam his temporibus nonnihil variatam non minùs copiosè, quàm eleganter suo more tribus modis exponit* Clarissimus MARINONIUS (b)

Reductio verò unius mappæ ad aliam cùm fieri possit quo ad aream & quô ad spatium tantum quod occupat, *probe tenendum id quod de scalis mappæ subiiciendis in ipsa resolutione quæstionis* §§. 402, 405. *monuimus.* Mappæ scilicet reductæ quô ad aream multiplam scala simpla, sed quo ad spatium tantùm reductæ scala multipla subiicienda; *& contra* mappæ reductæ ad aream submultiplam sca[la] multipla, sed ad spatium tantùm submultiplum reductæ scala etiam submultipla apponenda.

Tab: IX. Fig: 113. *Ita si quadrata xz & ADCB, quæ sup[er] latera homologa mapparum excitata fore[nt] (§.400.), metiaris scala sc; apparebit quadr[atum] ADCB noncuplô majus quadratô xz; simul[que] constabit novies majori charta opus esse. Quodsi verò scalâ SC exploraveris quad[ratum] xz; invenietur xz novies minus quadratô A[B] CD. Sed si quadr: xz scalâ metiaris sc, [et] quadr: ABCD scalâ SC; spatia diversa, ar[e]as tamen æquales unum scilicet pedem, a[c] chordam reperies.* Paulò

(a) *CHRYSTOPHORI SCHEINER S.J. Pantographice Romæ* 168.

(b) *DE RE ICHNOGRAPHICA p.*267.&c.

Paulò aliter, quàm nos, de ſpatio occupando per mappas reductas in ratione ſcalarum ſentit laudatus MARINONIUS; inquit enim (c): 'In mappis inæqualibus & ſimilibus ejuſdem Territorii, Dominii &c. proportio ſcalæ majoris ad alteram minorē ſolummodò reſpicit earum extenſiones in longitudinē; ſiquidē utriuſq; unus eſt valor, idemqué numerus hexapedarum, vel decēpedarum æqualium utriq; adſcriptus. Habeat enim ſcala 1000 decēpedarum *eg.* in mappa formæ majoris longitudinem integri pedis, & in ſimili altera formæ minoris ſcala totidem hexaped: contracta fuerit ad 4 pollices. Erit itaqué ſcala minor $\frac{2}{5}$ majoris; ideoqué intelligetur: in hac ratione prodiiſſe mappam reductam.

Non dixerim tamen humani aliquid paſſum in his præſertim non admodum obſcura, ſed potius id velociori calamo ex aliis eadem transferenti reiqué examen ſtrictiùs prævertenti adſcribendum puto. Enimverò cùm non ſolum longitudines, ſed latitudines quoqué ſcalis definiantur (§. 106, 235.), ſiquidem de mappis ſimilibus ſermo eſt; ſi fuerit ſcala una ad alteram ut 2 ad 5, erit mappa ut 4 ad 25 etiam quò ad ſpatium; cum mappæ ſimiles ſpatia etiam ſimilia non occupare non poſſint (§. 26.).

THEOREMA LXII.

407. *Circuli & figuræ ſimiles ipſis inſcriptæ vel circumſcriptæ ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum.*

M DE.

(c) Locô cit. p. 279.

DEMONSTRATIO.

Tab: I. Fig: 8. Ponamus deſcribi duos circulos, & iis ci[r]cumſcribi quadrata; omnia utrobiqué e[o]dem modô determinabuntur (§.107,& 336.) ſunt ergo figuræ utræqué inter ſe ſimil[es] (§. 108.). Conſequenter quadrata circu[lis] circumſcripta ad ſuos circulos eandem rati[o]nem habere debent (§ 126, 145. *Arithm:*) hoc eſt: ſi ponatur circulus major C, minor c, & quadratum majus Q, minus q; erit

Q: C = q: c; igitur & Q: q = C: c (§. 148. *Arithm:*). Circuli itaqué inter ſe ſunt ut quadrata diametrorum. *Q. e. unum.*

Eôdem modô oſtenditur; figuras ſimil[es] circulis inſcriptas vel circumſcriptas eſſe [ut] circulos, quibus inſcribuntur, vel circumſc[ri]buntur (§. 145. *Arithm:*); ſed circuli ſ[unt] ut quadrata diametrorum *per demonſtr:* [er]go figuræ ipſis inſcriptæ vel circumſcriptæ [ſi]miles ſunt ut quadrata diametrorum (§. [...] *Ar.*). *Q. e. alterum.*

COROLLARIUM.

408. Sunt ergo circuli in ratione dupl[ica]ta diametrorum (§. 353.), adeoqué cum [ra]dii ſint ut diametri (§. 31, & 155. *Arithm:*) ſunt etiam in ratione duplicata radiorum (§. 141. *Arithm:*).

THEOREMA LXIII.

409. *Circulus æqualis eſt triangulo, c[ujus] baſis peripheriæ, altitudo radio æqualis.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Concipiatur peripheria circuli in partes numerô infinitas, inter se æquales, adeoqué infinitè parvas divisa; arcûs infinitè exigui ab supra chordam cognominem excessus erit quôvis dato minor, seu inassignabilis; adeoqué revera nullus. Tab: I. Fig: 4.

Concipiantur porro ex centro C ad extrema arcûs infinitè parvi ab ducti radii Cb & Ca; erit angulus aCb infinitè parvus, adeoqué a & b non different à recto (§. 207.), consequenter si ab sumatur pro basi, erit radius aC trianguli abC altitudo (§. 198.). Cum adeò area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numerô infinita, quorum altitudo communis est radius aC, bases verò simul sumptæ sunt æquales peripheriæ circuli *per demonstr:* erit ille æqualis ttiangulo, cujus basis peripheriæ circuli, altitudo radio æqualis (§. 397.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

410. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 375.), hoc est: si circulos designent C & c, peripherias P & p, radios R & r, erit

$C : c = RP : rp$ (§. citt: & 60 *Ar:*).

Sed $C : c = R^2 : r^2$ (§. 408.).

Quare $RP : rp = R^2 : r^2$ (§. 141. *Arit:*).

Consequenter $P : p = R : r$ (§. 160. *Arit:*).

Sunt itaqué peripheriæ inter se ut radii (§. 126. *Arithm:*).

COROLLARIUM II.

411. Cùm adeo sit P: R = p:r (§. 148. Ar. sive P: 2R = p: 2r (§. 159. *Arithmet.* erit ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 31.) in omnibus circulis eadem.

COROLLARIUM III.

Tab: X. Fig: 127. 412. Cùm eadem demonstratio de sectore circuli procedat; sector circuli ACD æqualis est triangulo, cujus basis arcus AD, altitudo radius AC.

SCHOLION.

413. *Facilè ergo area circuli inveniretur (§. 409.) si ratio vera daretur peripheriæ ad diametrum. Verùm etsi in quadrando circulo ab omni ævo, quò Geometria exculta, præstantissima desudârint ingenia, perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit; ut ut nostra præsertim ætate ars inveniendi optimè promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris propè veris dederunt multi. Inter alios Archimedes, Ptolomæus, Vieta, Hugenius; præsertim Adrianus Metius & Ludolphus à Ceulen plus cæteris & accuratius ea super laborârunt. Quibus autem viis ad id pervenerint, præmittenda sunt quædam.*

THEOREMA LXIV.

414. *Polygonum inscriptum minus, circumscriptum majus est circulò. Similiter illius perimetrum*

perim

perimeter minor, hujus autem perimeter major peripheriâ circuli.

D E M O N S T R A T I O.

Latera AB, BC, CD &c. Polygoni inscripti sunt chordæ arcus cognomines subtendentes (§. 323.), sed chordæ sunt arcubus minores (§. 170.); ergo singula polygoni latera AB, BC &c. sunt singulis arcubus ijsdem respondentibus minora; consequenter perimeter polygoni circulo inscripti est hujus peripheriâ minor (§. 85. *Ar:*). *Q. e. 1mum.* Tab: VIII. Fig: 104.

Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt, area polygoni parti circuli congruit (§. 3.), adeoqué ipsi æqualis est (§. 145.); consequenter polygonum circulo inscriptum est minus eodem circulo (§. 18. *Arithm:*). *Q. e. 2dum.*

Latera polygoni circumscripti ab, bc, &c. tangunt circulum (§. 336.), adeoqué tota extra eum cadunt (§. 39.); consequenter circulus parti polygoni congruit (§. 8. *Ar:* & 3. *Geom:*); hinc ipsi æqualis (§. 145.), hoc est: circulus polygono circumscripto minor (§. 18. *Ar:*). *Q. e. 3tium.*

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita circuli radii & perimetrorum (§. 397, 409, 375.); hoc est: ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 35. *Ar:*); consequenter illa ad hanc, ut illius

perimeter ad hujus peripheriam(§.157.*Ar:*) sed polygonum hoc majus circulô *per demon* Ergo & ejus perimeter major peripheriâ ci culi (§. 126. *Ar:*). *Q. e. 4tum.*

THEOREMA LXV.

Tab: X. Fig. 128. 415. *In triangulo rectangulo ABC, Quadratum hypothenusæ AC æquale est quadra tis laterum AHIB & BCED simul sumpti*

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF; itemque BK psi CF parallela (§. 219.). Quoniam △ AC cum parallelogrammo CEDB (§. 90.) sup eadem basi & inter easdem parallelas exis hujus dimidium est (§. 372.).

Ex eadem ratione △ BCF est dimidiu parallelogrammi LCFK. Enimverô quia $=$ o (§. 84, 127.); adeoque x + y $=$ o y (§. 78. *Ar:*), & BC $=$ CE, AC $=$ (§. 84.); ideo △ ACE $=$ △ BCF (§.159 consequenter BCED $=$ LCFK (§. 78. *Ar*

Eôdem modô ostenditur esse AHIB $=$ LKG. Quamobrem BCED + AHIB $=$ FK + ALKG (§. 78. *Arithm:*) $=$ AC (§. 85. *Ar:*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

416. *Inventor hujus Theorematis est a tiquissimus Philosophorum Samius ille P THAGORAS, qui etiam primus ludum peruit, in quo Juventus tam honestas tam*

no-

nobiles artes addisceret. Idem incommensurabiles magnitudines & regularia quinque corpora primus detexit. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis prope ratio philosophandi illi ex numeris duceretur. Geometriam verò, ut refert Laërtius, à materia abstraxit primus; in qua mentis elatione præter alia complura etiam Theorema XXVI (§. 207.) invenit. Propter quæ, sed præsertim propter Theorema præsens celeberrimus. Ipse verò bujus inventionis tantâ lætitiâ affectus est, ut teste Appollodoro apud Laërtium hecatomben, hoc est: centum boum sacrificium immolârit. Ideo ergo Theorema hoc pythagoricum dicitur, & amplissimi per Mathesim universam est usus.

COROLLARIUM I.

417. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumptis æquale, si *imò* latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos [§. 216.]. *2dò* super data hypothenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter [§. cit:], ducaturqué hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$, & $BD^2 = BC^2 + CD^2$ [§. 415.]. Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ [§. 14. *Ar:*]. Tab XI. Fig: 129.

COROLLARIUM II.

418. Siquidem circuli sunt ut quadrata dia-

 metro-

metrorum [§. 407.]; facilis etiam erit addi-
tio circulorum. Eſt enim circulus diame-
trô BD deſcriptus æqualis 3bus aliis, diame-
tris AB, AC, & CD, deſcriptis. Nam
circulus diametrô BD deſcriptus eſt ad alios

$$C : c + c + c = BD^2 : AB^2 + AC^2 + CD^2$$

[§. cit:]. Sed $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$
[§. 417.]. Ergo $C = c + c + c$ [§. 12
Arithm:].

C O R O L L A R I U M III.

Tab: X. Fig: 126. 419. Eôdem modô figuræ ſimiles aliæ po-
ſunt addi. *Ex. gr.* Si trianguli y baſis d jun-
gatur ad angulum rectum in triangulo x, &
ſuper hypothenuſa hy tanquam baſi triangu-
lum S ſimile ipſi triangulo y conſtruatur; e-
rit △ S duplum trianguli y. Nam eôdem
modô $\triangle S : \triangle y = hy^2 : d^2$ [§. 400.]; ſed
$hy^2 = 2d^2$ [§. 415.]; igitur $\triangle S = 2$
y [§. 126. *Arit:*].

Sed pro polygonis irregularibus, & map-
pis ſatius ſcalæ ad angulos rectos jungendæ
& hypothenuſa pro ſcala ſumenda [§. 405.]

C O R O L L A R I U M IV.

420. Quodſi ſubduplum vg. △li S & ſimi-
le △lum y petatur; manifeſtum eſt △li S ba-
ſis hy partes dimidias jungendas eſſe ad an-
gulos rectos, & ſuper hypothenuſa pro baſi

ſumpta

ſumpta △ ſimile dato conſtruendum.

Si verò △li dati ſubtriplum, ſubquadruplum &c. petatur, duæ tertiæ, aut duæ quartæ &c. partes baſeos jungantur ad angulos rectos. Deinde ductæ hypothenuſæ pars ſubmultipla normaliter applicanda; donec quadratum hypothenuſæ pro baſi △ ſubmultipli ponendæ quadratis partium baſeos ſubmultiplis æquale evadat. *Ex. gr.* Pro ſubtriplo △; ſi duæ tertiæ partes baſeos jungantur ad angulos rectos; ductâ hypothenusâ, erit quadratum ejus duarum tertiarum quadratis æquale [§. 415.]. Deinde ſi jungatur normaliter una tertia baſeos, & hypothenuſa alia ducatur, erit hæc altera hypothenuſa æqualis tribus quadratis partium trium baſeos [§. cit:]; conſequenter cum quadratum baſeos dati △ eſſet 9 Quadratorum partium 3um [§. 352.], & △li ſuper hypothenuſa pro baſi inventa Quadratum eſſet 3um partium; eſſet unum ad aliud ut 9 ad 3, ſeu ut 3 ad 1. Sed quoniam tædioſior eſt operatio; invenietur id ipſum faciliùs per §. 404, vel 405. Tab: X. XI. f. 126. 129.

COROLLARIUM V.

421. Similiter figuræ ſimiles à ſe invicem ſubtrahentur. *Ex. gr.* Sit ſubtrahendus circulus ABCI ex circulo ACFD; jungatur diametro majoris circuli ACFD diameter ſubtrahendi AC, ducatur deinde CF, ſuper qua aſſumpta pro diametro ſi deſcribatur circulus CGFH, erit is differentia circulorum ACFD & ABCI. Nam cum triangulum ACF ſit re- Tab: XI. Fig: 130.

ctangu-

ctangulum (§. 298.), erit $AF^2 = AC^2 + CF^2$. Cum igitur circuli sint ut quadrata diametrorum (§. 407.), erit ACFD = CGFH + ABCI (§. 418.); consequenter ACFD — ABCI = CGFH + ABCI — ABCI (§. 81 *Ar:*), hoc est: ACFD — ABCI = CGFH.

COROLLARIUM VI.

Tab: XI Fig: 130. 422. Si AB fiat æquale BC in semicirculo ABC, erunt etiam circuli ATBX, ZBYC æquales (§. 407, 415.); consequenter erit ATBX + ZBYC = ABCI (§. 418.). Igitur circulus ABCI in duos alios ATBX & ZBYC dividitur; si illi super æqualibus subtensis in semicirculo describantur. Ut verò proinde in tres circulos æquales, aut quotcunque dividatur; obtinebitur id per (§. 420, aut per §. 404.).

COROLLARIUM VII.

423. Quodsi AB fuerit = 1, & AC = 1;

Tab: XI. Fig: 131. erit CB = $\sqrt{2}$. Si porrò fiat AD = CB = $\sqrt{2}$; erit DB = $\sqrt{3}$. Si fiat AE = 2; erit BE = $\sqrt{5}$. Si fiat AF = EB = $\sqrt{5}$; erit EB = $\sqrt{6}$ (§. 415, & 267. *Ar:*) & ita porrò in infinitum. Omnes adeò ra-

dices

dices quadratæ ſurdæ ſunt ad unitatẽ, ut linea recta ad aliam rectam; conſequenter numeri (§. 9, 10. *Arithm:*) iiqué irrationales (§. 38, 268. *Arithm:*).

COROLLARIUM VIII.

424. Cum CB ſit diagonalis quadrati (§. 99.); erit ea ad latus AB, ut $\sqrt{2}$ ad 1; ſed $\sqrt{2}$ eſt numerus irrationalis (§. 423.), adeoqué unitati incommenſurabilis (§. 38. *Arith:*), conſequenter diagonalis quadrati eſt lateri incommenſurabilis. Tab: XI. Fig: 131.

SCHOLION.

425. *Quadrati latus eſſe incommenſurabile diagonali celebratiſſimum eſt apud veteres Philoſophos, Ariſtotelem præſertim & Platonem adeo; ut, qui hoc neſciret, eum Plato non hominem eſſe, ſed pecudem diceret. Inde quoqué* R. P. TACQUETUS *infert:* (a) Atqué hoc vel unico argumentô, tametſi cætera omnia deficerent, evidentiſſimè conficitur magnitudines ex definito punctorum numero componi non poſſe; aliàs enim nullæ eſſent incommenſurabiles, omnium quippe menſura communis eſſet punctum.

COROLLARIUM IX.

426. Dantur adeò quantitates incommenſura-

(a) *In Scholio Propoſitionis 47mæ l. I.*

ſurabiles; hoc eſt quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 26. *Ar:*); conſequenter rationes irrationales (§. 140. *Arithm:*). Et hinc patet non repugnare, ut hæ numeris irrationalibus exprimantur; videlicet BC: AC $= \sqrt{2}: 1$ (§. 415, & 267, 126. *Arithm:*).

Cum verò $\sqrt{2}: 1$, conſequens ſit unitas; erit exponens rationis $\sqrt{2}$ (§. 114, & 116. *Ar:*); quæ cum ſit æqualis ipſi BC (§.423.), exponens rationis datæ exprimi poteſt lineâ, quamvis in numeris rationalibus vel irrationalibus exprimi non poſſit. *Id quod demonſtrandum in Arithmetica promiſimus* §.115.*Ar.*

PROBLEMA LXI.

Tab: X. Fig: 127. 427. *Datis chorda AB & radio AC, invenire chordam arcûs dimidii AD.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bifariam ſecat in D *per hypoth:* etiam chordam AB biſecat, & ad eam perpendicularis eſt (§. 272.), adeoque anguli ad E recti ſunt (§.67.). Quare

I. A quadrato radii AC ſubtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE. reſiduum eſt quadratum ipſius EC (§. 421.).

II. Ex hoc reſiduo extrahatur radix quadrata (§. 240. *Arith:*), quæ erit EC.

III. Hæc ex radio DC ſubducta relinquit DE.

IV.

IV. Addantur quadrata AE & DE, ſumma eſt quadratum DA (§. 415.).

V. Inde ergo ſi extrahatur radix (§. 240. *Arithm:*), habetur chorda arcûs dimidii AD.

Ex. gr. *Si radius AC 10000 & AB latus Hexagoni; erit AB itidem 10000* [§. 237.]; & *AE* = 5000; quare

AC^2 =	100000000	AE^2 =	25000000
AE^2 =	25000000	ED^2 =	1795600
CE^2 =	75000000	DA^2 =	26795600
CE =	8660	DA =	5176
DC =	10000		
DE =	1340		

PROBLEMA LXII.

428. *Dato latere polygoni regularis inſcripti AB, invenire latus circumſcripti* FG.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipſi AB, & DC chordam AB bifariam dividit (§. 336.), erit AE Tab: XI. Fig: 132.
$= \frac{1}{2}$ AB; eſt verò CE : EA = CD : DG (§. 230.). Quare ſi ob angulum rectum ad

E (§. 272.) investigetur EC, ut in problemate præcedente, reperietur DG (§. 276. *Ar:*), cujus duplum est latus Polygoni circumscripti FG.

Est enim CE : CD = EA : DG, & CE:CD = EB : DF (§. 230.), cum adeò sit EA: DG = EB : DF (§. 141. *Arithm:*), & EA = EB *per demonstrat:* erit etiam DG = DF (§. 152. *Arith:*), adeoqué FG = 2D. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Sit CD = AB = 10000; erit AE = 5000, & EC = 8660 (§. 427.) adeoqué DG = 5773. Hinc FG = 11546.

PROBLEMA LXIII.

429. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

I. Quærantur per continuam bissectionem latera Polygonorum inscriptorum (§. 427.) donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.

II. Invento hoc latere quæratur porro latus polygoni similis circumscripti (§. 428.)

III. Multiplicetur utrumqué per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni tam inscripti, quàm circumscripti [§. 94.].

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major, quàm ejusdem ad perimetrum Polygoni circumscripti; minor verò quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 414. *Geom:* & 180. *Arithm:*).

Diffe-

Differentiâ verò inter utramquê perimetrum cognitâ, facilè definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

SCHOLION.

430. *ARCHIMEDES primus adinvenit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inſcripta & circumſcripta, & polygonis 26 laterum uſus invenit rationem diametri ad peripheriam eſſe ut 7 ad 22 fere. Nimirum ſi diameter* $=$ *1, perimeter polygoni inſcripti reperietur* $3\frac{10}{71}$; *perimeter verò circumſcripti* $3\frac{1}{7}$. *Nemo autem plus operæ impendit* LUDOLPHO à CEULEN, qui *tandem reperit, poſita diametro 1, peripheriam eſſe minorem quam* 3. 141592653 589 793238 4626433 8327. 850. *Sed majorem quam idem numerus cyphrâ ultimâ in unitatem mutata.* Sed quia numeri tam prolixi parum praxi reſpondent; in Geometria practica hodie aſſumitur diametrum eſſe ad peripheriam ut 100 ad 314, vel in circulis majoribus ut 10000 ad 31415. Hugenius (b) Compendioſiorem monſtravit viam, ſed pluribus Theorematis nixam, quæ in his elementis non demonſtrantur.

COROLLARIUM.

431. Si diameter fuerit 113, erit ratio ejus ad

(b) *In inventis de Circ: magnit: prop: 18. p. 15. prop: 20. p. 40.*

ad peripheriam ut 113 ad 355 quàm proximè, hoc est ex illa ratione LUDOLPHI 10000: 3145 = 113: 355 (§. 276. *Ar*:).

Quæ ratio est ADRIANI METII a Parente suo inventa ac demonstrata (a), idqué satis accurata, id quod conferenti eam cum Ledulphina patet (§. 126. *Ar*:).

PROBLEMA LXI.

432. *Datâ diametrô circuli invenire peripheriam & aream ejus, & data peripheriâ invenire diametrum.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

I. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 430, 431.), una data, invenietur altera (§. 276. *Ar*:).

II. Peripheriâ ductâ in 4tam diametri partem habetur area circuli (§. 409, 379.).

Ex. gr. *Sit diameter* $5\overset{\prime\prime}{6}$; *erit*

100: 314 = 56: *Periph*: $\overset{0}{1}7\overset{\prime}{5},\overset{\prime\prime}{8}4$

314 × 56	$\frac{1}{4}$ Diametri = $1\overset{\prime\prime}{4}$
1884	703 36
1570	1758 4

Periph: $\overset{0}{1}7\overset{\prime}{5},\overset{\prime\prime}{8}4$. *Area* = $\overset{0}{2}4,\overset{\prime}{6}1,\overset{\prime\prime}{7}6$

CO

(a) *In libello adversus quadraturam circuli Simonis AQUERCU conscripto.*

COROLLARIUM I.

433. Si diameter 100, peripheria verò sit 314 [§. 430.]; erit area circuli 7850 [§. 432.]. Est veró quadratum diametri 10000 [§. 352.]. Ergo quadratum diametri ad aream circuli ut 10000 ad 7850 [§. 106. *Ar:*]; seu ut 1000 ad 785 [§. 155. *Ar:*] quàm proximé.

COROLLARIUM II.

434. Similiter si diameter 113, peripheria 355. [§. 431.]; erit area circuli $10028\frac{3}{4}$ [§. 432.]; est verò quadratum diametri 12769 [§. 352.]; ergo hoc ad illam ut 12769 ad $10028\frac{3}{4}$ [§. 106. *Ar:*], seu per 4 multiplicando utrumqué [§. 153. *Ar:*] ut 51076 ad 40115; consequenter [dividendo per 113.]; ut 452 ad 355 [§. 156. *Ar:*].

Quæ Metiana proportio priori accuratior.

COROLLARIUM III.

435. Area igitur circuli invenitur etiam; si ad 1000, 785 & quadratum diametri; aut si ad 452, 355, & quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur [§. 276. *Ar:*].

Ex. gr. *Sit diameter 56''; erit quadratum ejus 3136''* [§. 352, 357.]. Quare [§. 433.]

$1000 : 3136'' = 785^{\circ} : 24, 61', 76''$

COROLLARIUM IV.

Tab: XI. Fig: 133. 436. Si area circuli minoris GEHF subtrahatur ex area majoris concentrici ADBC relinquitur annulus ADBCGEHF.

PROBLEMA LXIII.

437. *Data area circuli invenire diametrum.*

RESOLUTIO.

I. Quæratur ad 785, 1000, & aream circuli datam $24^{\circ}, 61', 76''$ numerus quartus proportionalis $3136''$ (§. 276. *Ar:*); qui est quadratum diametri (§.433.).

II. Inde extrahatur radix quadrata $56''$ (§. 240. *Ar:*); quæ est diameter quæsita.

COROLLARIUM.

438. Hinc datâ areâ omnes figuræ regulares scilicet & irregulares in circulum commutari possunt. Inventa enim diametro circulus describi potest (§.116,31.).

PROBLEMA LXIV.

Tab: X. Fig: 127. 439. *Dato radio circuli AC unà cum ratione*

tione arcûs AB ad peripheriam, invenire aream sectoris ACB.

RESOLUTIO

I. Inveniatur semiperipheria inferendo 100 : 314 = AC ad semiperipheriam (§. 276. *Ar:*) & 432 *Geom:*).

II. Quæratur porro ad 180°, arcum datum ABC in gradibus, & semiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 276. *Ar:*), ut habeatur peripheria arcûs AB in eadem mensura, in qua radius AC datur.

III. Tandem peripheria arcûs AB ducatur in semiradium, aut totus radius ducatur in semiperipheriam.

Factum exprimet aream sectoris (§. 412, 379.).

Ex. gr. *Sit radius AC* = 6'

Arcus AB = 60°

I. 100 : 314 = 600''' [§ 284 *Ar*].

semiperiph: = 1884''' [§ 375. *Ar*].

II. (180° : 1884''' = 60
60 (
(3 : 1884''' = 1 : 628'''

III. 628'' = Periph: Arc: AB

300''' = $\frac{1}{2}$ AC

N2 Area

Area = $18^{o},84^{\prime}$.

COROLLARIUM I.

Tab: X. Fig: 127. 440. Quodsi △ ACB subtrahatur ex are sectoris CBDA, residuum erit area segmen BDAE. *Ex. gr. Sit area sectoris* = 1 *$84^{\prime}$, & area trianguli* = *$15^{o},18^{\prime}$; erit segmen tum ADBE* = *$3^{o},66^{\prime}$*. Si verò BCA a datur sectori BFACB prodibit segmentu majus.

Itaqué si detur altitudo segmenti DE, dimidia basis EA, quæraturqué area segmen

1mò. Si protendatur EA in B, ut sit p *hypoth:* EA = BE, habentur tria puncta D, A; itaqué describitur peripheria circ per §. 276. & in eo basis segmenti applic tur AB.

2dò. Quæritur diameter per §. 309, sagitta in directum protenditur.

3tiò. Denique ductis radiis ex centro & CA area sectoris inquiritur per §. 43 atqué △ ACB ab area ejusdem subtrahitur.

Vel 1mò diameter quæritur per §. 309, reliqua omnia eôdem modô fiunt.

COROLLARIUM II.

Tab: XI. Fig: 134. 441. Similiter area Zonæ ADCB inve tur, si areæ segmentorum AEB, & DFC area circuli ADFCBE subtrahantur.

SCHO-

SCHOLION.

442. *Ne pro invenienda area sectoris atq; segmenti peripheriam investigari opus sit, arcuum gradus atqué scrupula tam prima, quàm secunda istiusmodi particulis expressa, qualium diameter est 100000, in Tabula subsequente exhibere placet.*

Constructio Tabulæ intelligitur ex resolutione Problematis LXIV. Usus talis est. Sit ex. gr. ut in casu problematis citati Diameter 1200''', & arcus 60°. Cúm 60 gradibus respondeant in Tabula 52359 particulæ diametri; inferatur.

$$100000 : 52359 = 1200'''$$

$$\begin{array}{r} 1200''' \\ \hline 10471800 \\ 52359 \\ \hline \end{array}$$

Peripher: 62830800'''

Est ergo arcus 628''', *ut supra* §. 439 *eundem invenimus,*

Tabula pro convertendis gradibus Arcuum in partes Diametri

Gradus	Part:Perip:	Min:	Part:Per:
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17452	20	290
30	26179	30	436
40	34904	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Secu:	Part:Per:
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1

Grad:	Part:Periph:	Minut:	Part:Per:
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
190	165680	50	12
360	314159		

DEFINITIO LXXX.

443. Sit ADBC ſemicirculus, & AC = CF. Deſcribatur radiô FA quadrans AEBF, erit ADBE Lunula Hippocratis. Tab: XI. Fig: 135.

COROLLARIUM.

Quoniam $AF^2 = 2 AC^2$ (§. 415.), erit quadrans AFBE ſemicirculo ACBD æqualis (§. 407.); ablatô igitur utrinqué ſegmentô communi AEBC, erit ADBE = △ AFB (§. 81. *Arithm:*) = CB^2 (§. 384, 380.). In quadratum itaqué lunula Hippocratis convertitur, ſi ſuper radio ſemicirculi, in quo exiſtit, quadratum FB conſtruitur (§. 322.).

Quare etiam area illius innoteſcit per §. 352.

SCHOLION.

444. *Non iſta ſolùm HIPPOCRATI CHIO inſigni Geometræ laus inventionis debetur, ſed præter adinventam duplicationem cubi per duas medias proportionales (§. 315.), & alia bene multa, quod teſte PROCLO elementa Mathematum primus conſcripſerit, & ab aliis inventa in ordinem digeſſerit.* Vixit adhuc ante Ariſtotelem.

Partis ergò circuli quadratura exacta habetur; etſi integrum nullus adhuc quadrare potuerit (§. 413.). Falluntur itaquè ii, qui quadraturam circuli perfectam dari poſſe negant. Manifeſtum enim eſt utrumquè lunulæ ſemicirculi ſcilicet & quadrantis arcum in rectam abire; etſi nos lateat, quâ ratione radii ad peripheriam. Non itaquè à ſola ratione vera peripheriæ ad diametrum quadradratura circuli dependet, etſi optimò omnium hoc modo inveniretur.

Videatur hac de re Clariſſimus Geometra R. P. TACQUET Geometr: Pract: l. 2. p. 84. & ſequent: in Schol: ubi quadraturam circuli omnino poſſibilem adſtruit ita, ut ſecùs ſentientes parùm Geometriæ peritos eſſe exiſtimet.

PROBLEMA LXV.

Tab: XI. Fig: 136.

445. *Parallelogrammum ABEC ex dato puncto D in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

Fiat EF = AD. & ducatur recta DF.
Erit ADFC = DBEF. DE-

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE, erit o = x (§. 140.), & ob parallelas AB & EC (§. 89.), y = u (§. 202.); ſed AD = FE *per conſtruct.* Ergo △ ADG = △ FGC (§. 159.). Eſt verò △ ACE = △ ACB (§. 320.). Quare ACFG = DBEG (§. 81. *Arithm:*); conſequenter ADFC = DBEF (§. 78. *Ar:*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXVI.

446. *Parallelogrammum atqué triangulum in partes quotcunqué æquales dividere.* Tab: XI. Fig: 137. 138.

RESOLUTIO.

I. Dividatur baſis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 231.).

II. In parallelogrammo ducantur rectæ 11. 22. In triangulo A1. A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2BD2 inter eaſdem parallelas AB & CD exiſtunt (§. 89.); eandem altitudinem habent (§. 196, 197.); ſunt itaqué in baſium ratione (§. 376.); conſequenter ob C1 = 12 = 2D *per conſtr:* etiam parallelogramma æqualia (§. 126. *Ar:*). *Q. e. unum.*

Cùm ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonniſi unica duci poſſit (§. 188.); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem habent (§. 197.); adeoqué ſunt in

in ratione basium (§. 376.); sed bases sunt æquales, ergo & triangula (§. 126. *Arith:*) *Q. erat alterum.*

PROBLEMA LXVII.

Tab: XI. Fig: 139. 447. *Dividere triangulum ABC in partes 3 ex dato puncto D.*

RESOLUTIO.

I. Dividatur △ in 3 partes ex angulo opposito C; scilicet in ACM, CMN & CNB (§. 446.).

II. Ex puncto dato D duc ad verticem lineam DC, atqué ex punctis divisionum M & N parallelas MR & NS ipsi DC describe.

III. Ducantur rectæ RD & SD.

Erunt ARD, RDSC & DSB partes 3 △li ABC æquales.

DEMONSTRATIO.

Nam △ CNS = DSN; (§. 372.). Ergo addendo utriqué BSN, erit CNB = DBS (§. 78. *Arithm:*). Sed CNB = $\frac{1}{3}$ ACB per §. 446. Ergo etiam DSB = $\frac{1}{3}$ ACB (§. 77. *Arithm:*). Eôdem modô ostenditur de △ ARD. Unde & reliquum RCSD = $\frac{1}{3}$ △ ACB. *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA LXVIII.

448. *Dividere △ DEF in partes quotcunqué æquales per lineas parallelas.* Tab. XII. Fig. 144.

RESOLUTIO.

I. Dividatur latus aliquod △li eg. EF in partes petitas ex. gr. in 4 in punctis g, o, z, (§. 231.).

II. Inter Eg & EF, item inter Eo & EF, atqué inter Ez & EF inveniantur mediæ proportionales (§. 308.), & basi parallelè applicentur in HI, KL & MN (§. 219.).

Erit △ EHI = HILK = KLMN = MNDF = $\frac{1}{4}$ △ DEF.

DEMONSTRATIO.

Eadem, quæ data est §. 404. Unde cum △EHI = $\frac{1}{4}$ DEF, & △EKL = $\frac{1}{2}$ △DEF, erit △ EKL — △EHI = HIKL = $\frac{1}{4}$ △EDF (§. 208. *Arithm:*). & ita porro. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

449. Si in triangulo EFD ponatur radius circuli FE pro altitudine, & peripheria FCIR pro basi (§. 432.); erit △ HEI = circulo a, & △ EKL = circulo a + b, qui est annulus. Tab: XII. Fig: 144. 143.

Item

Item $\triangle$ ENM $=$ circulo a + b + d. Deniq
$\triangle$ EDF $=$ circulo a + b + d + c, hoc eſt
circulo FCIR (§. 409. *Geom:* & 85. *Arith:*)
Igitur FCIR — a $=$ EFD — EHI, hoc
eſt: c + d + b $=$ FDHI (§. 81. *Arithm:*)

Sed trapezium FDHI $= \frac{3}{4}$ $\triangle$ EFD. Erg

etiam c + d + b $= \frac{3}{4}$ circuli FCIR (§.
cit: *Arithm:* & 154. *Geom:*). Similiter quoniam $\triangle$ EKL $=$ circulo a + b, & circulu
a $=$ $\triangle$ EIH (§. 409.); erit $\triangle$ EKL — EIH
$=$ a + b — a (§. 81. *Arithm:*), hoc eſt: LI
KH æquale annulo b; ſed trapezium LIKH

$= \frac{1}{4}$ EFD (§. 448.), ergo etiam annulu

b eſt æqualis $\frac{1}{4}$ circuli CIRF, & ita porrò.

Patet adeò circulum in partes annulares eôdem modô dividi, quô $\triangle$ per lineas parallelas (§. citt:); ſi ſcilicet inter radium EF, & partes deſideratas quæratur media proportionalis, atqué eâ circuli concentrici deſcribantur.

COROLLARIUM II.

Tab: XII. Fig: 144. 143.

450. Faciliùs ergò & area annulorum invenitur, quàm §. 436, & ipſi in circulum aut quadratum &c. commutantur. Etenim ſi fiat circulus CIRF æqualis $\triangle$ rectangulo EFD (§. 409, & 432.), atqué in altitudinem $\triangle$

EF

EF æqualem radio dati circuli transferantur annulorum diſtantiæ EI, IL, LN, ducanturque per puncta diviſionum NM, LK, IH parallelæ baſi FD, cum ſint annuli b, d, c æquales trapeziis D, M, K (§. 449.), invenietur area eorum per §. 385. Commutabuntur verò in circulum per §. 438, in triangulum aut quadratum per §. 387.

PROBLEMA LXVIII.

451. *Dividere trapezium parallelarum baſium in partes quotcunque eg. 3.* Tab: XI. Fig: 140.

RESOLUTIO.

I. Dividantur latera parallela AC & EH in partes 3.

II. Ducantur per interſectiones partium rectæ BF, & DG.

Erit ABEF = BDGF = DGHC.

DEMONSTRATIO.

△ ABE = △ BDF, & △ BEF = DFG (§. 372.); igitur ABE + BEF = BDF + DFG (§. 78. *Arithm:*), hoc eſt; ABEF = BDGF (§. 85. *Arithm:*).

Eôdem modô oſtenditur eſſe BDGF = DCHG. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

452. *Siquidem trapezia per lineas baſibus parallelas non redduntur ſimilia; dividi non poſſunt in partes datæ rationis per lineas paralle-*

ralle-

rallelas eô modô, quo triangula per §. 448. *Quod autem similia non sint, demonstratione apogogica evincimus.*

Sit enim DBti ∽ brti; erit BD : ti = ti : br (§. 153.); cùm ponatur etiam brsh ∽ hs BD, erit etiam BD : hs = hs : br (§. citt.)

Tab: XII. Fig: 145.

consequenter BD . br = ti^2, & BD . br = hs^2 (§. 269. *Arit:*), ac proinde $ti^2 = hs^2$ (§. 77. *Arithm:*). Quod cum sit absurdum, nam $ti^2 > hs^2$ (§. 91 *Geom:* & 218. *Arith:*) patet *Q. e. d.*

SCHOLION II.

453. TACQUETUS * *tradit modum ex dividendi trapezii per parallelam in duas tantùm partes, sed viâ satis operosâ. Docuit verò* Antecessor meus R. P. THOMAS ZI-BROWSKI S. J. ** *exdividere trapezium per parallelas in quot libuerit partes datæ rationis, etsi demonstrationem non compleverit. Quod insigne, quantum quidem mihi constat,* VIRI CLARISSIMI *inventum absoluta demonstratione ita pono.*

PROBLEMA LXX.

454. *Dividere trapezium brBD in quascunque partes datæ rationis per lineas basibus parallelas.*

Tab: XII. Fig: 145.

RESO-

* Geom: Pract: *l.* 2. *p.* 105. *cap:* 16. *Probl:* 3.
**In specimine Mathem: *ex Arithm: Geom: Trigon: & Algebra Annô* 1753.

R E S O L U T I O.

I. Protendantur in directum latera trapezii Br & Db, donec se intersecent in C. Tab XII. Fig: 145.

II. Quæratur ad totam CD & ejus segmentum bC tertia proportionalis Ce, scilicet CD: bC = bC: Ce (§. 226.).

III. Dividatur eD in partes desideratas *e. g.* tres in f & g (§. 231, 232.).

IV. Quærantur inter CD & Cf, item inter CD & Cg mediæ proportionales Ch, & Ci, hoc est: ut sit CD: Ch = Ch: Cf, & CD: Ci = Ci: Cg (§. 308.).

V. Intervallô inventæ Ch, item Ci, ex trianguli vertice C intersecetur latus CD in h & i; perqué puncta ista sectionis ducantur ipsi BD parallelæ hs & it.

Dico fore Trapezium brBD ad trapezium brsh ut 3 ad 1.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam *per hypothesim* (§. 32. *Methodi Mathem:*) sive mavis *per constr*: CD : bC = bC : Ce, & CD : Ch = Ch : Cf; erit Cb^2 = CD. Ce, & Ch^2 = CD. Cf (§. 270,60 *Arithm:*). Porro △ BCD: △ Cbr = DC^2 : Cb^2, & △ Chs : △ Cbr = Ch^2 : Cb^2 (§. 400. *Geom:* 225. *Arithm:*); igitur △ BCD: △ CBr = DC^2 : DC. Ce, & △ Chs: △ Cbr =

= DC. Cf: DC. Ce (§. 142. *Arithmet:*); consequenter △ BCD: △ Cbr = DC : Ce & △ Chs: △ Cbr = Cf: Ce, (§. 157. *Ar:*) atque hinc △ BCD — △ Cbr: △ Cbr = DC — Ce: Ce, & △ Chs — △ Cbr: △ Cbr = Cf — Ce: Ce, hoc est: brBD: △ Cbr = De: Ce, & brsh: △ Cbr = ef: Ce (§. 169 *Arith:*); itaque brBD: brsh = De: ef (§. 170. *Arith:*); sed De: ef = 3: 1 *per constr.* ergo etiam brBD: brsh = 3: 1 (§. 126. *Arithm:*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

455. Quoniam *per demonstrata* §. 449 Annulus bD est æqualis trapezio brBD; ita si *1mò* inveniatur per §. 276. segmentum radii bc, *2dò* reliqua tria juxta resolutionem Problematis fiant; tandemque *3tiò* intervallis Ch, item Ci ex centro C describantur circuli, dividetur etiam annulus bD in 3 partes x, y, & z.

PROBLEMA LXXI.

Tab: XI Fig: 141. 456. *Dividere trapezoidem ADCE in partes quotcunque eg. 3.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur BC basi AE parallela, tandemque trapezium ABCE dividatur ut in problemate præcedenti. Erit ABD1G = $\frac{1}{3}$ ADCE = D1GF2 = D2FEC (§. 451, 446.). *Q. e. f. & d.*

PRO-

PROBLEMA LXXI.

457. *Figuram rectilineam quamcunque ABCDE in partes æquales dividere.* Tab: XI. Fig: 141.

RESOLUTIO.

I. Quæratur area figuræ (§. 385.), atque eidem triangulum vel rectangulum æquale construatur (§. 388.).

II. Triangulum hoc vel rectangulum in partes petitas divide (§. 446.), & denique

III. Triangula vel rectangula singula, prout vel spatium tulerit, vel in alia sibi æqualia commutata per §.371 in data figuræ area constitue.

Vel potius.

Tab: XI. Fig: 141.

I. Quæratur area figuræ, & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet eg. in 3.

II. Area partis in nostro casu 3tiæ ulterius dividatur bifariam.

III. Area △ AED subtrahatur à parte 3tia, & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD, erit quotus Q, altitudo △li AID priori AED addendi, ut AEDI sit pars 3tia figuræ (§. 383.).

IV. Quare intervallô hujus altitudinis ducatur PI parallela ipsi DA, ut habeatur in latere figuræ punctum I; ex quo si ducatur recta DI, erit AEDI pars 3tia figuræ.

V. Pars 3tia dimidia, sivè sexta totius figuræ dividatur per $\frac{1}{2}$ DI, quotus erit NK

 altitu-

altitudo △li DKI sextam figuræ partem con-
stituentis.

VI. Intervallô igitur hujus altitudinis ag-
tur ipsi ID parallela (§. 219.), ut habeatur
punctum K (§. 372.).

VII. Dividatur etiam dimidia pars 3tiæ fi-
guræ per $\frac{1}{2}$DK, ut habeatur Lo altitudo
△ KLD sextam itidem partem figuræ consti-
tuentis.

VIII. Quare hujus intervallô denuò du-
tur ipsi KD parallela, ut punctum L deter-
netur, ducaturqué recta KL, quæ partem fi-
guræ 3tiam KIDL resecabit.

IX. Si figura plures, quàm tres in par-
resolvenda, eôdem modô ulterius proced-
dum.

COROLLARIUM.

458. Quodsi ex area $5773^{\circ}, 38'$ resec-
sint $962^{\circ}, 23'$. 1mò dividatur prior area
posteriorem, ut innotescat, quota sit pars
totius, ex qua auferri debet. Deinde reli-
omnia fiant, ut in problemate præcedente

Ita in exemplo $5773^{\circ},38'$ divisum per 9
$23'$ quotum dat 6, sexta igitur est pars 962°
(§. 61. *Ar:*), quæ ex area debet resecari.
6 itaqué partes area dispescenda, & una ea
resecanda.

SCHOLION I.

459. *Si AED majus tertia eg. parte, ipsam partem 3tiam à △lo subtrahi necesse est, & residuum, si dividatur per* $\frac{1}{2}$ *DA, erit quotus altitudo trianguli ab ipso △lo DEA auferendi. Sæpe etiam consultum est, ut 1ma pars AEDI per duo triangula, uti & cætera, determinetur.*

SCHOLION II.

460. *Ubi in charta divisio absoluta, in campo puncta IKL per quantitatem rectarum AI, IK, & DL facilè determinantur* (§. 113.).

CAPUT VII.

DE SECTIONE ET SITU PLANORUM.

DEFINITIO LXXXI.

461. Planum EUCLIDI *ad planum rectum seu perpendiculare* est, cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum ABCD & EF GH sectioni HG perpendiculares ducuntur in plano EFGH, rectæ sive perpendiculares sint alteri plano ABDC. Tab: XIII. Fig: 147.

COROLLARIUM I.

Tab: XIII. Fig. 148. 462. Si locò ſectionis ducatur in plano recta EF; rectæ omnes GE, HF ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares ſunt etiam ad planum ABDC perpendiculares (§.30.).

COROLLARIUM II.

Tab: XIII. Fig: 149. 463. Cùm in plano ABCD à quolibet puncto A vel a ad quodlibet punctum C vel b duci poſſit linea recta (§. 30.), ſi recta FE fuerit perpendicularis ad duas rectas AC & ab in plano ABCD ductas, & ſe mutuò in puncto E ſecantes; erit ea perpendicularis ad rectam quamvis aliam BD, quæ per punctum E ducitur in eodem plano (§. 462.). Conſequenter recta EF ad duas rectas AC & ab in plano ABCD perpendicularis, omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos inſiſtit (§. 67.).

SCHOLION.

464. Hinc linea recta EF ad planum ABCD perpendicularis *definitur, quæ cum rectis omnibus lineis in plano ductis, à quibus illa tangitur, angulos rectos facit.*

DEFINITIO LXXXII.

Tab: XIII. Fig: 150. 465. Inclinatio plani KEGL ad planum ABCD eſt angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam ſectionis EG perpendiculares.

THEOREMA LXV.

Tab: XIII. Fig: 151. 466. *Rectæ lineæ pars quædam AB non poteſt eſſe in ſubjecto plano DE, & pars quædam BC in ſublimi.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri possit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars verò altera BC in sublimi. Cùm linea recta utrinqué produci possit (§. 16.), producatur AB in F; erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ A BC *per hypoth*: punctum igitur rectam describens, mutat directionem in B, progrediendo scilicet tam versùs F, quàm versùs C; quod cum sit absurdum (§. 13.), rectæ lineæ pars quædam AB non potest esse in subjecto plano DE, & pars quædam BC in sublimi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

467. Duæ igitur rectæ ADEB & CDF segmentum commune DE habere non possunt (§. 466.); consequenter *duæ rectæ AB & C F se mutuò non intersecant, nisi in uno puncto D.* Tab: XIII. Fig: 152.

COROLLARIUM II.

468. Si trianguli ABC una pars ADE esset in subjecto plano, & altera pars BDEC in sublimi, esset etiam pars rectæ AD in subjecto plano, & altera pars BD in sublimi (§. 74.); sed hoc est absurdum (§. 466.); *totum itaq; triangulum ABC erit in eodem plano.* Tab: XIII. Fig: 153.

COROLLARIUM III.

469. Siquidem rectarum BE & DC se mutuò secantium in A partes AB & AC sunt crura trianguli ABC, erunt eædem in eodem plano (§. 468.); sed in eodem plano est EA, in quo est AB, & AD in eodem plano, in quo est AC (§. 465.); *ergo lineæ EB & DC se mutuò secare non possunt; nisi in eodem plano sint.* Tab: XIII. Fig: 154.

THEOREMA LXVI.

470. *Si duo plana ABCD & EFHG se mutuò secent; erit communis sectio recta IK.*

DEMONSTRATIO.

Tab: XIII. Fig: 155. Quoniam rectæ AB & EF se mutuò non intersecant, nisi in puncto I, nec rectæ DC & GH, nisi in puncto K (§.456.), si communis planorum sectio non est recta unica, sed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducatur ergo in plano EFHG recta ILK, & in plano ABCD recta IMK, quod fieri posse patet, si sectio communis planorum ABCD & EFHG non est recta unica IK, utut planum sectionis lineis curvis in punctis I & K coeuntibus terminari sumas (§. 170.). Duæ igitur rectæ ILK & IMK cum earum extrema in I & K coincidant, totæ in punctis omnibus coincidere debent. (§. 150.); consequenter communis sectio esse non potest, nisi recta jungens puncta I & K. *Q.e.d.*

THEOREMA LXVII.

471. *Si duæ rectæ AB & CD fuerint in eodem plano; recta EF eas secans in G & H erit in eodem plano.*

DEMONSTRATIO.

Tab: XIII. Fig: 156. Secet planum aliud planum datum, in quo positæ sunt rectæ AB & CD, in punctis G & H recta transiens per G & H est comunis sectio planorum (§.469.), sed eadem est pars lineæ EF (§.150) quæ duas AB & CD secat *per hypot:* Recta igitur secans EF est in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q.e.d.*

THE-

THEOREMA LXVIII.

472. *Si recta IE fuerit ad planum ABCD perpendicularis, & ex E tanquam centro in eodem plano descriptus sit circulus; erunt rectæ IG, IF &c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ductæ inter se æquales.* Tab: XIII. Fig: 157.

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F, G, &c. radii EF, EG &c. erit EF = EG (§. 32.); cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 464.), erit etiam ang: FEI = ang: GEI (§. 127.); consequenter cum sit EI = EI, erit FI = GI (§. 159.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXIX.

473. *Ex eodem puncto E ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis EF erigi potest.*

DEMONSTRATIO.

Si fieri potest, erigatur adhuc altera perpendicularis EG, erit ergo tam EF, quàm EG perpendicularis ipsi rectæ ab (§. 464.), sed hoc est absurdum (§. 183.); ex eodem igitur puncto E nonnisi unica perpendicularis EF erigi potest. *Q. e. d.* Tab: XIII. Fig: 149.

THEOREMA LXX.

474. *Ab eodem puncto I in sublimi dato ad idem planum ABCD perpendicularis nonnisi unica IE demitti potest.* Tab: XIII. Fig: 157.

DEMONSTRATIO.

Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia perpendicularis IG. Jungantur E & G in plano rectâ EG: erit IEG triangulum in eodem plano (§.458.). Duo igitur in triangulo ad basim anguli E & G recti sunt (§.464.) sed hoc est absurdum (§.189.), à puncto itaque I ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis demitti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXI.

Tab. XIII. Fig. 157. 475. *Linea perpendicularis IE est brevissima, quæ à puncto extra planum dato ad idem duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta adhuc alia IG, & puncta E & G jungantur rectâ EG: erit triangulum IEG in eodem plano (§. 468.). Tum siquidem angulus ad E rectus (§. 464.), erit IE < IG (§. 191.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXII.

Tab. XIII. Fig. 158. 476. *Si recta LE tribus rectis EF, HE, IE, vel etiam pluribus in eodem puncto E concurrentibus perpendiculariter insistat; erunt tres illæ rectæ FE, HE & IE, vel etiam plures in eodem plano ABCD.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri potest, recta EF in plano LEGK, quod secat planum ABCD, in quo sunt duæ reliquæ EH & EI, in recta EG (§.470.). Quoniam LE perpendiculariter insistit duabus rectis EH & EI in plano ABCD *per hypoth.*

eadem

eadem quoqué ad angulos rectos insistit rectæ EG (§. 463.). Sed cum LE etiam perpendicularis sit ad EF *per hypoth:* erit etiam LEF rectus (§. 67.); consequenter angulus LEF ipsi LEG æqualis (§. 127.), pars nempe toti (§. 8. *Arit:*). Quod cùm sit absurdum, rectæ FE, HE & IE, quibus LE perpendiculariter insistit, in eodem sunt plano ABCD. *Q. e. un.*

Quodsi lineæ in puncto E concurrentes fuerint quatuor, quibus LE perpendiculariter insistit, siquidem tertia cum prima & secunda in eodem sunt plano *per demonstrata*, erit etiam quarta cum secunda & tertia in eodem plano; & ita porro. *Q. e. alterum.*

THEOREMA LXXIII.

477. *Lineæ rectæ FE & GH eidem plano ABCD perpendiculares sunt inter se parallelæ, & si una parallelarum FE vel GH fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem planum perpendicularis erit altera.* Tab: XIII. Fig: 149.

DEMONSTRATIO.

Ducatur in plano à puncto E ad punctum H recta EH. Cùm igitur utraqué FE & GH sit perpendicularis plano ABCD, utraqué etiam perpendicularis erit rectæ EH (§. 30.); ac proinde anguli GHE, & FGH recti (§. 67.); adeoqué æquales (§. 127.). Consequenter GH parallela ipsi FE (§. 203.). *Q. e. unum.*

Similiter si ducatur in plano ABCD recta EH, quoniam *per hypothesim* FE & GH sunt parallelæ; erunt anguli ad E & H æquales (§. 202.); consequenter cùm rectus sit *per hypoth:* ad E (§. 67.), rectus etiam erit ad H,

vel

vel è contra (§. 127.); ac proinde si una parallelarum FE est perpendicularis ad planum ABCD, erit etiam altera (§. 67.). *Q. e. alt.*

THEOREMA LXXIV.

Tab: XIII. Fig: 159 478. *Si duæ rectæ AC & CB fuerint parallelæ duabus rectis DF & EF, etiamsi non sint in eodem plano, anguli, quos comprehendunt, æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Fiat CB = FE & CA = FD; quoniam CB parallela ipsi EF, & CA parallela ipsi FD *per hypoth:* erit BE ipsi CF, & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 218.); consequenter BE parallela (§. 158.) & æqualis (§. 77. *Arithm:*) ipsi AD; ac ideo AB parallela & æqualis ipsi DE (§. 218.). Est itaque angulus DFE = ACB (§. 159.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXV.

Tab: XIII. Fig: 160. 479. *Si recta IK duobus planis ABCD & EFGH fuerit perpendicularis, erunt plana inter se parallela.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta IL in plano ABCD, & ponatur ML ad istud perpendicularis, quæ plano FGHE in M occurrit, & cum LM ad planum EG recta sit *per hypoth:* ad IK parallela est (§. 477.). Quare si puncta M & K jungantur recta MK, erit tam angulus K, quàm I rectus (§. 464.), consequenter LM = IK (§. 205.). Cùm eodem modo demonstretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipsi

IK

IK parallelam eidem æqualem esse; plana AB CD & EFGH ubivis à se invicem eodem intervallo distare (§. 475, 12.) patet. Sunt igitur inter se parallela. *Q. e. d.*

SCHOLION.

480. *Nimirum* planum *ABCD* alteri *EF GH dicitur* parallelum *ita, sicuti recta alteri rectæ parallela est, si ubivis eandem inter se distantiam servent* (§. 70.).

THEOREMA LXXVI.

481. *Si planum ADCB secet duo plana parallela EFGH & IKLM; erunt sectiones AD & BC inter se parallelæ.* Tab: XIII. Fig: 161.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim sectiones AB & BC non esse inter se parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent. Cùm igitur si plana cum istis sectionibus continuentur, totæ in ijsdem sint (§. 466.), ipsa quoqué plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela itaqué non sunt (§. 481.); quod cùm sit absurdum, sectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH, & IKLM parallelæ sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVII.

482. *Si duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes AC & AB duabus aliis se mutuò tangentibus EG & EF fuerint parallelæ; etiam plana ACDB & EGLF per ipsas ducta erunt parallela.*

DEMONSTRATIO.

Conci-

Tab: XIII. Fig: 162. Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atqué E G parallelæ (§. 219.), erunt eædem HK, HI parallelæ rectis AB & AC (§. 158.), & AH tum ad HK tum ad HI perpendicularis (§. 464.). Consequenter AH erit etiam perpendicularis ad AB & AC (§. 200.), atqué ideo perpendicularis quoqué ad planum ABCD (§. 463, 464.), erit igitur planum ABCD parallelum plano EFLG (§. 479.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVIII.

Tab: XIII. Fig: 163. 483. *Duæ lineæ rectæ NR & CS à planis parallelis ABDC, EFHG, & IKLM proportionaliter secantur, ut nempe sit PR : P* $=$ *TS : TO.*

DEMONSTRATIO.

Jungantur puncta sectionum N & O, item R & S rectis NO & RS, ducaturqué rect OR; erunt △ △ NOR, ORS in eodem pla (§. 468.). Siquidem verò PQ parallela ipsi NO, & QT parallela ipsi RS (§. 481 erit RQ : QO $=$ RP : PN, & RQ : QO $=$ TS : TO (§. 221.); consequenter RP : P $=$ TS : TO (§. 141. *Ar:*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXXII.

Tab: XIII. Fig: 157. 484. *Ad datum planum ABDC in dat puncto E erigere perpendicularem EI.*

RESOLUTIO.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABD intervallo quocunqué EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI eo modo, ut puncti

quod-

quodcunqué I à peripheriæ punctis quibuscunqué F & G æqualiter distet, *quod mechanicè fit per fila æqualia ex dictis punctis extensa*; erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 472.).

COROLLARIUM I.

485. Cum △ IEG, & quodcunqué aliud eodem modo determinatum *eg.* △ EIF, sit rectangulum; evidens est, si crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, sit in centro E, erit crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare. *Insignis itaqué est usus normæ in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.*

SCHOLION.

486. *Normæ crura aliquam latitudinem habere debent, ne ad rectam EG applicata oculorum fallant judicium.*

COROLLARIUM II.

487. Quodsi ex puncto I extra planum dato demittenda sit perpendicularis; norma super plano erecta huc illucqué promovenda, donec crus erectum idem attingat. Si verò crus normæ brevius sit, quàm ut punctum I attingere possit, cum filo ex puncto I extenso coincidere debet.

THEOREMA LXXIX.

488. *Si recta IK sit ad planum ABCD perpendicularis; planum quodcunqué eg. EH GF, quod per eam ducitur, ad idem planum ABCD perpendiculare est.* Tab: XIII. Fig: 147.

DE-

DEMONSTRATIO.

Ducatur LM ad ſectionem communem pla-norum HG perpendicularis. Cùm etiam ſi IK ad HG perpendicularis *per hypoth:* eri LM ipſi IK parallela (§. 217.). Porro I perpendicularis eſt ad planum ABCD *per hy-poth:* ergo etiam perpendicularis eſt ad idem planum LM (§. 477.); conſequenter planu EHGF rectum eſt ad planum ABCD (§. 461. Id quod de alio omni plano, quod per ipſa ducitur, verum eſt. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

489. *Sectio NO duorum planorum EF H & IKLM ad idem tertium ADCB per-pendicularium eſt ad idem planum perpendi-cularis.*

DEMONSTRATIO.

Tab: XIII. Fig: 164. Quoniam planum EFGH ad planum ADC perpendiculare *per hypoth:* ex puncto O du poterit in plano EFGH recta ad planum A CB perpendicularis (§. 484.). Eodem m do patet, ex eodem puncto O duci poſſe in planum IKLM ad planum ADCB perpendicu larem. Sed ad idem punctum O eidem pl no ADCB unica tantùm perpendicularis in ſtere poteſt (§. 473.), & etiam commu planorum IKLM & EFGH ſectio NO non unica recta eſt; ergo iſta recta NO ſive ſect duorum planorum perpendicularium ad idem tertium ADCB ut perpendicularis non ſit, eri non poteſt. *Q. e. d.*

C O R O L L A R I U M.

490. Quodsi ergo juxta perpendicula AB & EF oculô constitutô in C & G respiciatur per puncta H & D, cùm planum mensulæ Prætorianæ in praxi geometrica ad horizontem componatur; prodibit sectio planorum HCBD & GHFD recta HD, adeoqué perpendicularis plano tabulæ (§.489, 488.). Itaqué punctum H imminebit puncto D (§. 487.). Tab: II. Fig: 32.

S C H O L I O N.

491. *In praxi geometrica tabulâ mensoriâ duplici motu ad angulum rectum præditâ utimur, tamdiu scilicet huc vel illuc promovendâ, donec sectio filaris planorum transeat per acum in H & per clavum in D. Hoc modo obtinetur, ut vertex anguli in tabula immineat vertici anguli in solo. Id quod demonstrandum superius §. 134, 254. promisimus.*

THEOREMA LXXXI.

492. *Plani KLGE ad planum ABDC in omnibus punctis F, f &c. inclinatio eadem.*

D E M O N S T R A T I O.

Erigantur ex punctis F & f perpendiculares FH & fh in plano ABDC, & aliæ FI & fi in plano EKLG (§. 182.), fiatqué HF = hf & FI = fi, erunt HF & hf, itemqué FI & fi parallelæ (§. 217.); consequenter etiam Hh & Ii parallelæ ipsi Ff. Cùm verò sit Hh Tab: XIII. Fig: 150.

= Ff

$=$ Ff, & Ii $=$ Ff (§. 218.), adeoqué etiam Hh parallela ipsi Ii (§. 158.); sitqué etiam Hh $=$ Ii (§. 77. *Ar:*), erunt proinde HI & ih inter se æquales (§. 218.). Igitur anguli F & f æquales (§. 159.), atqué adeò inclinatio plani ad idem planum in singulis punctis eadem (§. 465, 45.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

493. Mensura itaqué anguli inclinationis planorum f, est arcus inter perpendiculares ad sectionem hf & fi interceptus atqué ex f ductus (§. 48, 265.).

Finis Partis Primæ.





ELEMENTA GEOMETRIÆ

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT I.

DE PRINCIPIIS GEOMETRIÆ SOLIDÆ.

DEFINITIO I.



294. Olidum ſive *Corpus* eſt magnitudo tribus dimenſionibus prædita, ſeu extenſum in longitudinem, latitudinem atqué profunditatem.

DEFINITIO II.

Tab: XIV. Fig: 165. 495. *Angulus solidus B* est, qui pluribu quam duobus planis angulis in eodem pla non constitutis, ad idem tamen punctum co untibus, continetur.

Dicuntur autem *Anguli solidi æquales*, inter se invicem positi congruunt.

COROLLARIUM I.

496. Ut anguli solidi sint æquales, angulis p nis & multitudine & magnitudine æqu bus ac ordine eodem dispositis contineri bent; ut scilicet plana angulos planos æq les continentia æqualiter ad se invicem clinentur (§. 465.).

SCHOLION.

497. *Bene nimirum TACQUETUS servat de angulis solidis, qui ex plano inclinatione oriuntur, eodem modo rati nandum esse, quò de planis angulis, qui untur ex linearum ad se invicem inclinati*

COROLLARIUM II.

498. Cùm anguli solidi distingvi non sint, nisi per planos, quibus continentur (495.), plani verò si fuerint similes, e etiam æquales, & contra (§. 147, 156.) gitur si fuerint anguli solidi similes, e etiam æquales; & contra (§. 497.).

COROLLARIUM III.

499

499. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes efficiant 360 gradus, planum circuli sternunt (§. 33, 48.), adeoqué solidum angulum non constituunt (§. 495.); quare summa angulorum in omnibus planis solidum angulum constituentibus quatuor rectis, seu 360° gradibus minor esse debet.

DEFINITIO III.

500. *Corpus regulare* est solidum planis regularibus & inter se æqualibus ad constituendos angulos terminatum. Reliqua corpora dicuntur irregularia.

SCHOLION.

501. *Corpora regularia dicuntur etiam* Platonica, *propterea quod* PLATO *in* Timæo *corpora, quæ statuit simplicia, Cœlum scilicet, ignem, áërem, aquam, atqué terram cum iisdem comparat.*

COROLLARIUM.

502. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero & magnitudine æqualibus contineatur (§. 501.), omnes anguli corporis cujuslibet regularis æquales sunt (§. 496.).

DEFINITIO IV.

503. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu sibi semper pa- Tab: XIV. Fig: 166.

P2 rallelo

rallelo deorſum feratur, *Priſma* ABCDFE deſcribit: & quidem *rectum*, ſi linea directri AE fuerit ad planum deſcribens perpendicu laris; *obliquum verò*, ſi linea directrix ad idem planum fuerit obliqua. In ſpecie *Priſma* di citur *triangulare* ſive *trigonum*, ſi planu deſcribens fuerit triangulum; *quadrangul re*, ſi fuerit planum quadrangulare; & i porro.

COROLLARIUM I.

Tab: XIV. Fig: 166. 504. Quodlibet adeo priſma habet du baſes oppoſitas ABC & EDF æquales, circumcirca terminatur tot parallelogramm quot latera baſis habet. Eſt enim AC ED parallela & æqualis *per hypoth.* Er & AE parallela ipſi CD (§. 89.). Idem e dem modo de cæteris planis lateribus oſte ditur.

COROLLARIUM II.

505. In priſmate plana ſectionum pa lela ACB, HIG ſunt inter ſe æqualia. Æqu tur enim plano deſcribenti ACB (§. 5 *Geom*: & §. 73. *Arithm:*); ergo & inte æqualia ſunt (§. 77. *Arithm:*).

DEFINITIO V.

Tab: XIV. Fig: 165. 506. Si planum deſcribens ABCD fu quadratum, & linea dirigens AE ſit later jus AB æqualis, angulus præterea BAE DAE rectus; *Cubus*, ſive *Hexaëdrum* de bitur.

COROLLARIUM.

507.

507. Cubus itaque terminatur sex quadratis inter se æqualibus (§. 84, 322.); Et ejus plana sectionum basi parallelè factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 506, & §. 73. *Ari*:); consequenter etiam æqualia inter se (§. 77. *Arithm:*).

DEFINITIO VI.

508. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum, *parallelepipedum* describitur. Tab: XIV. Fig: 167.

COROLLARIUM.

509. Plana sectionum basi parallelæ sunt parallelogramma ipsi æqualia (§§. 508, *Geom:* 73. *Arithm:*), adeoque & æqualia inter se (§. 77. *Arithm:*). Terminatur quodque parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum duo opposita inter se æqualia sunt (§. 89.).

DEFINITIO VII.

510. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD, motu sibi semper parallelo, deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus*, si recta CF, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum perpendicularis; *Scalenus Cylindrus*, si dicta Axis CF ad angulos obliquos diametro DE insistat. Tab: XIV. Fig: 168.

Describitur etiam *Cylindrus rectus*, si parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur.

COROLLARIUM I.

Tab: XIV. Fig: 168. 511. Sunt ergo ex *genesi 1ma* non mod bases Cylindri AB & DE æquales, verum e tiam sectiones basibus parallelæ sunt circu & inter se æquales (§. 73. *Arithm:*).

COROLLARIUM II.

512. *Ex genesi verò 2da:* Superficies C lindri recti demptis basibus æqualis est r ctangulo, cujus basis peripheria, & altitu ipsa altitudo Cylindri.

DEFINITIO VIII.

Tab: XIV. Fig: 169. 513. Si recta quædam KM in periphe circuli NM ita incedat, ut constanter inh reat puncto fixo K; describetur conus NK Punctum K *vertex*, recta verò EL, quæ puncto K ad diametrum basis ducitur, *A Coni* appellatur. *Rectus Conus* est, cùm xis KL ad diametrum baseos circularis p pendicularis est; *Scalenus vel obliquus*, c axis ad diametrum plani circuli inclina ad angulos obliquos. Linea describens *est latus Coni.* Possumus quoqué *Coni* ge sim ita concipere, ut circellus infinitè p vus motu sibi semper parallelo ita deors feratur, ut cum centrum continuò sit in a KL, tum radius PQ axi PK proportionali continuò augeatur. Describitur etiam C *nus rectus*, si triangulum rectangulum KL circa rectam KL circumvolvatur.

COROLLARIUM.

Tab: XIV. Fig: 169 514. Quoniam *per ultimam Coni genes* PQ

PQ ipsi LM parallela, erit KL: PK = LM: PQ (§. 230.). Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum; planum parallelæ sectionis basi coni est circulus basi minor.

SCHOLION.

515. *Quoniam in cono obliquo latus coni non ejusdem longitudinis in quovis peripheriæ puncto; patet lineam describentem KM, quæ altero sui extremo peripheriæ NM constanter adhæret, per punctum fixum K aliqua sui parte nunc deorsum, nunc sursum moveri debere. Unde patet* in definitionibus geometricis geneticis tanquam entium imaginariorum admitti etiam posse miraculosa. Tab: XIV. Fig: 169.

DEFINITIO IX.

516. Si semicirculus AKB juxta diametrum AB revolvatur; *sphæra* describitur. Diameter circuli AB est etiam *Diameter*, item *Axis sphæræ:* centrum C etiam est centrum sphæræ. Tab: XIV. Fig: 170.

COROLLARIUM.

517. Omnes ergo rectæ ex sphæræ superficie in centrum ductæ sunt inter se æquales (§. 32.).

DEFINITIO X.

518. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, CDB & BDA in uno puncto D coeuntibus, quot basis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, qua- Tab: XIV. Fig: 171.

quadrangularis, quinquangularis &c. si basis triangularis, quadrangularis &c.

COROLLARIUM I.

Tab: XIV. Fig: 171. 519. Si ac, cb, ba, lateribus basis AC, CB, BA parallelæ ducantur, erunt angnii a, b, c æquales angulis A, B, C (§. 202.); consequenter △ abc ∽ △ ABC (§. 230.); igitur quævis pyramidis triangularis sectio basi parallela, est eidem basi similis.

COROLLARIUM II.

520. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera baseos demptis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres &c. si pyramis multangularis plano basi parallelô secetur, erunt omnia triangula in sectionibus similia omnibus triangulis in basi (§. 519.); consequenter & totum planum sectionis simile toti basi (§. 156.). Igitur *in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est eidem basi simile.*

DEFINITIO XI.

Tab: XIV. Fig: 172. 175. 173. Tab: XIV. Fig. 174. 521. *Tetraëdrum* est solidum quatuor, *Octoaëdrum* est solidum octo; *Icosaëdrum* est solidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehensum. *Dodecaëdrum* verò est solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus constans.

DEFINITIO.

522.

522. *Mensura solidi* est cubus, cujus latus perticæ unius æquale, diciturqué pertica cubica. Hæc dividitur in *pedes*, vel *perticulas*, *digitos*, lineas &c. cubicas, hoc est in cubos, quorum latus pedem vel perticulam, digitum, lineam &c. adæquet. Tab: XIV. Fig: 165.

CAPUT II.

DE SOLIDORUM CONSTRUCTIONE ET DIMENSIONE.

PROBLEMA I.

523. *Describere Retia, ex quibus corpora regularia, item Cylinder, Prisma, Pyramis & Parallelepipedum construi possent.*

RESOLUTIO.

I. *Pro Hexaëdro seu Cubo:* sex quadrata conjuncta fiant. Tab: XIV. Fig: 176.

II. *Pro Tetraëdro sive pyramide triangulari regulari.* Trianguli æquilateri ABC latera bisecentur, dein ducantur rectæ xz, zy. (§. 521.). Tab: XIV. Fig: 177.

III. *Pro Octaëdro*; Octo triangula æquilatera æqualia jungantur (§. cit:). Tab: XIV. Fig: 178.

IV.

Tab: XIV. Fig: 179. IV. *Pro Dodecaëdro*: Delineentur 12 pentagona æqualia (§. cit:). Compendiò verò delineantur; si à quolibet pentagoni angulo o & i &c. per duo oppositi lateris extrema rectæ ducantur oh & is, tum fiat oh = ts &c. tandem intervallô lateris eôdem ot vel ts interfectiones fiant in x, in z &c. ut figura claudatur.

Tab: XIV. Fig: 180. V. *Pro Icosaëdro*; Viginti triangula æquilatera æqualia jungantur, ut figura clarè monstrat (§. cit:).

Tab: XIV. Fig: 181. VI. *Pro Parallelepipedo*: 6 parallelogramma; quæ duo opposita sint æqualia, describantur (§. 508.).

Tab: XIV. Fig: 182. VII. *Pro Prismate triangulari*: tria parallelogramma æqualia & duo triangula æquicrura delineentur (§. 503.).

Tab: XIV. Fig: 183. VIII. *Pro Cylindro*: *1mò*. Fiat rectangulum ABCD, cujus longitudo seu basis DC sit æqualis peripheriæ baseos circularis BASI, altitudo verò AD altitudini ipsius Cylindri.

2dò. Pro basibus describantur duo circuli A & D radiô datæ baseos circularis (§. 512.).

Tab: XV. Fig: 184. IX. *Pro Pyramide eg. quadrangulari*: Ducatur arcus AB, & in eo datæ baseos FD latus ED quater collocetur. (§. 518.) *Eodem modo quævis pyramidis basis polygona determinatur, etiamsi latera baseos inæqualia sint.* Omnia scilicet latera inæqualia in arcu ponenda.

SCHOLION.

524. *Quomodo verò dicta corpora construan-*

ſtruantur; item in plano deſcribantur; viſu ſub tempus prælectionum, & attentione ad projectiones opticas tantùm opus eſt.

THEOREMA I.

525. *Superficies Coni recti ſecluſa baſi æqualis eſt triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo latus Coni. Sectione verò baſi parallela truncati coni recti ACDB ſuperficies æquatur trapezio NHIO; cujus latera parallela NO & HI ſunt peripheriæ baſium AB & CD, altitudo autem KL eſt latus coni AC.* Tab: XV. Fig: 185. 190.

DEMONSTRATIO.

Si fuerit arcus LM infinitè parvus, à recta non differet, ac proinde △ KLM pro rectilineo habebitur; cum verò angulus K ſit infinité parvus; anguli L & M pro rectis angulis habebuntur (§. 207.) ; erit ergo KM ad LM perpendicularis (§. 67.); conſequenter erit KM altitudo △ KML (§. 198.). Sed coni recti ſuperficies in innumera iſtiusmodi triangula inter ſe æqualia reſolvitur (§. 513, 159.), ergo integra coni recti ſuperficies æqualis eſt triangulo, cujus altitudo lateri, baſis peripheriæ coni æqualis (§. 376.). *Q. e. unum.* Tab: XV. Fig: 185. 190.

HI & NO æquales peripheriis CD & AB *per hypoth:* altitudo verò ML = KL; item ſuperficies coni minoris ECD = MHI, atqué majoris ACDB = NHIO *per demonſtrata;* igitur AEB — CED = NMO — HMI (§. 81. *Arithm:*); hoc eſt ACDB = NHIO *Q. e. alterum.* CO-

COROLLARIUM I.

526. Superficies coni recti æqualis est sectori circuli, qui pro radio latus coni; pro arcu peripheriam baseos ejusdem coni habeat (§. 412.).

COROLLARIUM II.

Tab: XIV. Tab: XV. Fig: 169. 185.

527. Quodsi basim coni designet B, superficiem ejusdem seclusa basi S, semidiametrum baseos R; peripheriam P, latus coni L, erit B : S = RP : LP (§. 409, 375.) sive B : S = R : L (§. 157. *Arithm:*). *Est ergo basis coni recti ad superficiem suam seclusa basi, ut radius baseos ad latus ejusdem coni.*

THEOREMA II.

Tab: XIV. Fig: 165. 172.

528. *Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum, & Icosaëdrum sunt corpora regularia; nec præter hæc quinque aliud regulare corpus possibile.*

DEMONSTRATIO.

Cubus sex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icosaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter se æqualibus terminatur (§. 507, 521.). *Q. e. un.* *num.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icosaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad angulum solidum efficiendum concurrunt (§. 523.). Quo-

Quoniam verò sex istiusmodi angulorum summa est 360° (§. 210.), itaqué triangulis regularibus nullum corpus præter illa tria contineri potest (§. 499.).

In cubo tres anguli quadrati solidum angulum efficiunt (§. 523.); quare cum summa quatuor istiusmodi angulorum sit 360° (§. 84, 126.) quadratis nullum corpus continetur, nisi cubus.

In dodecâédro tres anguli plani solidum angulum constituunt (§. 523.); quia verò summa 4 istiusmodi angulorum est 452°, & summa trium angulorum in hexagono regulari est 360°, atqué in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 326.), ad angulum verò solidum constituendum tres saltem plani anguli requiruntur (§. 495.); pentagonis regularibus unicum dodecâédrum, figuris verò plurium laterum nullum aliud regulare corpus terminari potest. Corpora igitur regularia quinqué tantùm sunt. *Q. e. alterum.*

PROBLEMA II.

529. *Superficiem ac soliditatem cubi determinare.* Tab: XV. Fig. 186.

RESOLUTIO.

I. Pro superficie.

Cùm

Cum superficies cubi ex 6 quadratis æqualibus componatur (§. 507.).

1mò. Latus cubi in se ipsum ducatur, &

2dò. Factum per 6 multiplicetur (§. 352.), *hoc est* $3 \cdot 3 = 9$, & $9 \cdot 6 = 54$.

II. Pro soliditate.

1mò. Inveniatur basis per §. 352.

2dò. Basis multiplicetur per latus cubi. *Scilicet* $3 \cdot 3 = 9$, & $9 \cdot 3 = 27$.

DEMONSTRATIO.

Tab. XIV. Fig: 168. Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, perticulæ &c. æqualia (§. 522.), si latus cubi in partes quotcunque æquales divisum concipias, tot erunt cuborum ordines, quot in latere AB partes, & in quolibet ordine tot cubi minores, quot quadrata in basi ACFE reperiuntur. Quare si basim ACFE per latus cubi AB multiplices, prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

530. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 particularum, perticula 10 digitorum &c. (§. 19.), pertica cubica geom: est 1000 perticularum cubicarum, perticula cubica est 1000 digitorum cubicorum &c. Fractionum ergo decimalium cubicarum denominatores progrediuntur in ratione millecupla (§. 344 *Arithm:*); consequenter tribus notis fractiones

nes decimales cubicæ exprimendæ, si logarithmis denominatorum locò utamur (§. 346. *Arithm:*).

Ex. gr. Si latus cubi EF $2^{\circ}\,7'\,4''$ *erit soliditas* $20^{\circ}\,570'\,824'' = 20570824''$ §. 357 *Geom:* & 220. *Arithm. Sed superficies esset* $45^{\circ}\,04'\,56''$ (§. 357, 362.). Tab: XIV. Fig: 165.

COROLLARIUM II.

531. Quodsi latus cubi 12, erit soliditas 1728 (§. 529.). Quare si pertica ex divisione civili sit 12 particularum, perticula 12 digitorum &c. cujusmodi est pertica Rhenana; pertica civilis cubica est 1728 perticularum, perticula cubica 1728 digitorum cubicorum. Hinc si inventam soliditatem $20570824''$ dividas per 1728, quotus erit $11904'$ & $712''$. Quodsi $11904'$ iterum dividas per 1728, quotus erit 6°, & $1536'$, adeoque habebis 6°, $1536'$, $712''$. *Patet adeò quantum divisio mensuræ in 10 partes præstet divisione in 12.*

COROLLARIUM III.

532. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 230. *Arithm:*). Tab: XIV. Fig: 198.

Ex.

Ex. gr. Si fuerit latus unum ad aliud ut 1 ad 2, erit cubus unus A ad alium B, ut 1 ad 8. Æquales itaque cubi sunt, si latera æqualia habeant.

THEOREMA III.

533. *Parallelepipeda, Prismata, Cylindri, Pyramides & Coni, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Tab: XV. Fig: 188. 189. Si enim Parallelepipedum, Prisma, Cylindrus &c. in discos crassitiei quantumlibet minimæ secari cogitentur sectionibus basi parallelis, siquidem *per hypothesim* bases & altitudines æquales, ex uno tot disci prodibunt æquales, quot ex altero (§. 509, 505, 511, 520, 514.); consequenter cum disci omnes simul sumpti cum corporibus idem sint (§. 85. *Arithm:*), corpora tota inter se æqualia sunt (§. 78. *Arithm:*). *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

Tab: XIV. Fig: 167. 534. *Metiri superficiem ac soliditatem Parallelepipedi.*

RESOLUTIO.

Pro Soliditate.

I. Quæratur area baseos LIKM (§. 362.).
II. Multiplicetur per altitudinem LN.

Ex.

Ex. gr. Sit LM = 36, MK = 15

LN = 12		Basis LIKM	540
LM	36	LN	12
MK	15		
	180		1080
	36		54
Basis	540	*Soliditas*	6480

Pro Superficie.

I. Quæratur area parallelogrammorum LIMK, LMON & OMPK (§. cit:).

II. Addantur in unam summam, & summa hæc multiplicetur per 2.

Ex. gr. *LM*	36,	*LM*	36,	*MK*	15
MK	15,	*MO*	12,	*MO*	12
	180		72		30
	36		36		15
LIKM	540,	*LMON*	432,	*MOKP*	180

LIKM 540
MOPK 180

1152
2

Superficies 2304

THEOREMA IV.

Tab: XV. Fig: 187, 535. *Planum diagonale AHFD divi parallelepipedum ABDCEFG in duo p smata ADCEFH & ADBGFH inter se qualia.*

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogramm in duo triangula ACD & DBA æqualia (320.). Habent ergo prismata bases æqu les, sed etiam altitudinem AH eandem h bent (§. 197.); igitur ADCEFH = AD GFH (§. 533.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

536. Prisma igitur triangulare est di dium parallelepipedi super dupla basi, sed e jusdem altitudinis.

PROBLEMA IV.

537. *Metiri superficiem ac soliditatem pr matis.*

RESOLUTIO.

Pro Superficie.

Tab: XIV. Fig: 166. I. Quæratur basis (§. 379, 385, 398) multiplicetur per 2.

II. Quærantur etiam areæ parallelogram morum prisma circumcirca terminantium & earum summa addatur facto antecedent

Pro Soliditate.

asis B

Basis BAC per altitudinem CD multipli-cetur.

Ex. gr. Sit $BC = 4^{\circ}\,3'\,2''$, $AG = 3^{\circ}\,5'\,7''$

$CD = 8^{\circ}\,6'\,9''$

$BC = 216''$	$AC = 432''$
$AG = 357$	$CD = 869$
1512	3888
1080	2592
648	3456
Basis 77112.	*ACDE* 375408
$CD = 869$	3
694008	1126224
462672	2 *ABC* 154224
616896	
	Superf. 1280448
$67^{\circ}\,01'\,0328''$ *Solidit.*	

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 536.). Quodsi verò dupla basis, hoc est parallelogrammum multiplicetur per altitudinem; soliditas parallelepipedi prodit (§. 534.). Ergo si dimidia parallelepipedi basis, hoc est, basis prismatis triangularis per altitudinem multiplicetur, parallelepipedi dimidium, id est: prismatis soliditas habetur.

Cùm omnia priſmata reliqua in triangular
reſolvi poſſunt, eorum quoqué ſoliditas pr
dit, ſi baſis per altitudinem multiplicetu
Q. e. d.

PROBLEMA V.

538. *Data diametro AB & altitu Cylindri CF; invenire ſuperficiem ac ſoli tatem ejus.*

RESOLUTIO.

Pro Superficie.

Tab: XIV. Fig. 168. I. Quæratur peripheria baſeos & baſis pſa (§. 432.), hæcqué multiplicetur per

II. Peripheria ducatur in altitudinem, ctum hoc eſt ſuperficies ſeclusis baſibus (512.).

III. Addatur factum antecedens per reg lam 1mam inventum.

Pro Soliditate.

Multiplicetur baſis per altitudinem.

Ex. gr. Sit $AF = \overset{0\,\prime}{56}$, $CF = \overset{0\,\prime}{246}$;

Peripheria	=	$\overset{\prime\prime\prime}{17584}$
CF	=	$\overset{\prime\prime}{24600}$
		1055040
		70336
		35168

Superf

Superf: absque basi = 432566400
Duplum basis = 492352

	° ′ ″
Superficies =	4818016
Basis	″ 246176
	″ 2460
	14770560
	984704
	492352
	° ′ ″
Soliditas.	605592960

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam circulus est polygonum infinitorum laterum *per demonstr:* (§. 409.), Cylindrus æqualis erit prismati infinitorum laterum (§. 503, 510.). Ejus ergo soliditas invenitur, si basis ducatur in altitudinem (§. 537.). *Q. e. d.*

T H E O R E M A V.

539. *Prisma triangulare in tres pyramides æquales dividi potest.* Tab: XIV. Fig: 166.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 503.), pyramides ABCF & DFEA

habent altitudinem eandem (§. 480.), atque bafes ACB & DFE æquales (§. 504.). Eft ergo pyramis ACB = pyr: DFE. Similiter cum BEFC fit parallelogrammum (§. 504.), △ CFB = △ BFE (§. 320.). Habent itaque pyramides ACBF & BEFA bafes æquales; fed etiam altitudinem eandem habent (§. 474, 197.), confequenter æquales funt (§. 533.). Tres igitur iftæ pyramides inter fe æquales funt (§. 77. Arith.) Q. e. d.

SCHOLION.

540. *Si ex ligno paretur prifma, & fecetur, id quod in prælectionibus faciemus, demonftratio captui Tyronum magis accomodatur.*

COROLLARIUM I.

541. Pyramis triangularis eft tertia pars prifmatis fuper eadem bafi & ejufdem altitudinis.

Et quoniam multangulare quodvis in triangularia refolvi poteft per diagonales; quælibet pyramis eft pars tertia prifmatis fuper eadem bafi & ejufdem altitudinis (§. 161. *Arithm:*).

COROLLARIUM II.

542. Quia conus pro pyramide infinitangula haberi poteft (§. 513, 518.), fi fcilicet polygonum infinitorum laterum pyramidem defcribat eo modo, quo conum circellus (§. 513.); & Cylindrus pro prifmate infinitangulo fumi poteft, fi loco circuli polygonum infi-

finitorum laterum Cylindrum describat (§. 09,510.); quemadmodum Cylindrus cum prismate ejusdē baseos & altitudinis, ita etiam cono cum pyramide ejusdē baseos & altitudinis qualia erunt (§. 81. *Ar:*), atqué adeo *conus est ars 3tia Cylindri super eadē basi & altitudine* §. *cit:*).

PROBLEMA VI.

543. *Metiri superficiem ac soliditatem Pyramidis & Coni.* Tab: XIV. Fig: 169. 171.

RESOLUTIO.

Quæratur soliditas prismatis vel Cylindri eandem cum pyramide vel cono basim habentis (§. 537, 538.), inventaqué per 3. dividatur. *Quotus erit soliditas pyramidis vel coni* (§. 541. 542.).

Vel

Multiplicetur basis per tertiam altitudinis partem; aut contra.

Ex. gr. Si soliditas Prismatis fuerit 7010328″ (§. 537.), *erit soliditas pyramidis 2233̈7776. Si soliditas Cylindri fuerit 0559̈2960″* (§. 541.), *erit soliditas coni 201864320″.*

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium AC D, CBD, BDA areæ inveniantur (§. 379.), atqué in unam summam addantur. Tab: XIV. Fig: 171.

Tab. XIV. Fig. 169. Coni recti superficies prodit; si peripher[ia] baseos in latus ejus dimidium ducatur (§. 525.), & facto huic area baseos addatur.

Ex. gr. Si diameter Coni NM $=$ 56' *erit peripheria* 17584''', *basis* 246176'' (§. 432.). *Sit altitudo KL* $=$ 246'. *Quo[niam] LM* $= \frac{1}{2} NM = 28$, *& KM*$^2 = KL^2 + LM^2 = 60516 + 784 = 613$[…] (§. 415.); *erit KM* $=$ 2475'' (§. 240.) *consequenter superficies coni dempta basi* 76020'', *& hinc integra* 2422196'' (§. 3[…] *Arithm:*).

PROBLEMA VII.

Tab. XV. Fig. 190. 544. *Metiri superficiem ac soliditat[em] Coni recti truncati.*

RESOLUTIO.

Pro Superficie.

I. Mensuretur latus AC & diametri ba[si]um CGD & AFB (§. 113.), inveniantur[que] peripheriæ basium CD & AB (§. 432.);

II. Tum semisumma basium multiplicet[ur] per latus AC (§. 525, 385.).

Ex.

Ex. gr. Sit $AC = 1005'''$, *& diametri* $AFB = 8'$, $CGD = 6'$, *reperietur peripheria major* $AB = 2512'''$, *peripheria minor* $CD = 1084'''$ *(§. 432.); proinde* $\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD = 2198'''$, *itaque superficies coni truncati* $= 2198 . 1005 = 2^{0}\, 20'\, 89''\, 90'''$

Pro Soliditate.

Si dentur, aut menſurentur diametri baſium AB & CD, atque altitudo GF; demiſſa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cùm etiam ſit axis EF ad diametrum in cono recto perpendicularis (§. 513.), erunt CH & EF parallelæ (§. 477.). Quare cum △ EAF ſecet duo plana parallela CD & AB *per hypoth:*, erunt ſemidiametri CG & AF parallelæ (§. 481.), conſequenter CG = HF (§. 196.), & CH = FG (§. 205.); ideoque

I. Inferatur AH : HC = AF : FE (§. 229.) hoc eſt: ut differentia ſemidiametrorum ad altitudinem coni truncati, ita ſemidiameter major ad altitudinem coni integri per §. 283. *Arithm:* inveniendam.

II. Ex hac altitudine inventa ſubtrahatur altitudo coni truncati GF, ut relinquatur altitudo coni ablati EG.

III.

III. Quæratur ſoliditas conorum CED & AEB (§. 543.).

IV. Deniquè coni minoris ſoliditas ex majore auferatur; reſiduum eſt ſoliditas coni truncati ACDB.

Ex. gr. Sit AB 36′, *CD* 20′, *FG = CH* 12′, *erit AF =* 18′, *CG = HF* 10′ *& AH =* 8′; *adeoquè FE =* 27′ (§. 280. *Ar.*) *& GE =* 15′ (§. 90 *Arithm.*): *invenieturquè ſoliditas coni AEB =* 9156240‴, *& coni CED =* 1570000‴ *= proinde* 9156240‴ -- 1570000‴ = 7586240‴ *ſoliditati coni truncati CDBA.*

S C H O L I O N.

Tab: XV. Fig: 190. n. 1. 545. *Quod ſi dentur diametri baſium & altitudo coni truncati, cùm ſit GF = CH & CG = HF* per demonſtr: *ut latus AC menſuretur, opus non eſt; ſed cùm* $CH^2 + AH^2 = AC^2$ (§. 415.), *invenietur AC* per §. 240. Arithm: *ſuperficiesquè juxta reſolutionem problem: obtinebitur.*

Quod verò dicimus de cono truncato recto, id quoquè verum eſt de obliquo.

Tab: XV. Fig: 188, 189. Et in genere cùm parallelepipeda, Cylindri, priſmata, pyramides, coni obliqui ad recta corpora reduci poſſint, ſi ponantur inter eas-

dem

dem parallelas & ejusdem sint baseos (§. 533.), quin dictorum corporum scalenorum superficies & soliditas juxta resolutionem Problematum inveniri possit, dubitandum non est.

THEOREMA VI.

546. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus basis æqualis superficiei, altitudo autem radio sphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur superficies sphæræ in quadratula infinitè parva resoluta, quæ à planis non differunt, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quarum altitudines à radiis differunt quantitate inassignabili, hoc est revera nulla, bases verò simul sumptæ superficiei sphæræ æquantur. Tota igitur sphæra habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphæræ. *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

Tab: XV. Fig: 198. 191.

547. *Cylindrus æqualis basis & altitudinis cùm sphæra est ad eandem ut 3 ad 2.*

DEMONSTRATIO.

Si Quadratum ABCD cum inscripto quadrante CDB & Δlo ADC circa latus AB convertatur; quadratum ABCD Cylindrum (§. Tab: XV Fig: 191.

(§. 510.), quadrans hæmisphærium (§. 516.), triangulum conum (§. 513.) describit. Altitudo horum corporum cum eadem sit DC (§. 197.); si ea in discos infinitè parvæ crassitiei secentur, numerus eorum in dictis corporibus idem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci Cylindri; erit EG semidiameter disci hemisphærii, EF semidiameter disci coni. Cùm verò hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 116.), erunt inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 407.); hoc est, cum sit, propter parallelismum EH & CB *per hypoth:* EH = CB (§. 205.) = CG (§. 32.), atque ob CD: DA = CE: EF (§. 229.) & CD = DA (§. 84.), etiam EC = CF (§. 128. *Arit.*) ut quadrata rectarum CG, EG & EC. Quare si discum coni à disco Cylindri subtrahas, relinquitur discus sphæræ (§. 415.). Cùm ergo de omnibus discis idem verum est, numerusque eorum idem sit *per demonstr.* soliditas sphæræ totius relinquetur, si soliditas coni ex soliditate Cylindri subtrahatur. Sed conus est tertia pars Cylindri (§. 542.); ergo 3 — 1 = 2 soliditati scilicet sphæræ, itaque Cylindrus est ad sphæram ut 3 ad 2. *Q. e. d.*

SCHOLION.

548. *Ingeniosissimi* ARCHIMEDIS *est Theorema; tantique istud fecit, ut tumulo suo sphæram Cylindro inscriptam apponi voluerit; quo indicio monumentum ejus detexit disertissimus* CICERO. *Quem probè versatum mathematicis in disciplinis opera philo-*

so-

ſophica probant; ſine quibus perfectum fieri Oratorem nulla ratione poſſe ipſe confirmat, lib. 1. de Oratore: Meâ quidem ſententiâ, ait, non poterit eſſe omni laude cumulatus Orator, niſi erit omnium rerum magnarum atqué artium ſcientiam conſecutus. *Quædam igitur,* cogitare *ſcilicet* rectè, *atqué* unum ex alio inferre, *quæ Philoſophiæ debemus, Rhetoricæ,* ut illius principia, *præponenda ſunt.* Scribendi rectè, ſapere eſt principium & fons. *HORATIUS de arte Poet. Quo verò ordine Matheſis collocanda docuit* PLATO *apud Theonem Smyrn.* Adoleſcentibus, eorumqué ætati conveniunt diſciplinæ mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipſa ad capeſſendam Philoſophiam idonea reddatur.

THEOREMA VIII.

549. *Cubus diametrô ſpæræ deſcriptus eſt ad ſphæram propemodum ut 300 ad 157.* Tab. XV. Fig. 197.

DEMONSTRATIO.

Si diameter ſphæræ 100, cubus ejus 1000 000 (*§.* 522.), & Cylindrus cum ſphæra ejuſdem baſeos & altitudinis 785000 (§. 538.); conſequenter ſoliditas ſphæræ 15700 00: 3 (§. 547. *Geom:* 214. *Arithm:*). Eſt itaqué cubus diametri ad ſphæram ut 1000000 ad $523333\frac{1}{3}$, hoc eſt, multiplicando per 3 ut 3000000 ad 1570000 (§. 153.

153. *Arithm:*), & dividendo per 10000, ut 300 ad 157 (§. 153. *Arithm:*). *Q. e. d.*

Asseritur vero in demonstratione ratio prope vera, nam ratio diametri ad peripheriam est tantum prope vera (§. 430.).

THEOREMA IX.

Tab: XV. Fig: 198. 550. *Superficies sphæræ est quadrupla circuli maximi ejusdem sphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphæra æqualis est pyramidi, cujus basis est superficies sphæræ, altitudo vero radius ejusdem (§. 546.), soliditas sphæræ componitur ex duobus factoribus; ex sexta scilicet parte diametri & ex ipsa superficie sphæræ (§. 543.). Si ergo soliditas sphæræ per sextam diametri partem dividatur, quotus erit superficies integra sphæræ (§. 184. *Arithm:*). Sed est etiam soliditas sphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum sphæræ (§. 547, 538.); quare si hoc factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas; quotus erit $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 212. *Ar:*). Cum igitur quotus iste sit & superficies integra sphæræ, & est superficies comparata ad circulum maximum sphæræ *per demonstrata*, superfi-

perficies ſphæræ eſt omnino quadrupla circuli maximi ejuſdem ſphæræ (§. 195. *Ar:*). Q. e. d.

C O R O L L A R I U M.

551. Area circuli maximi eſt factum ex peripheria ejus in 4tam diametri partem (§. 432.). Ergo quadruplum hujus circuli eſt factum ex tota diametro in peripheriam (§. 97. *Arithm:*). Superficies itaqué ſphæræ habetur, ſi peripheria per diametrum multiplicetur; conſequenter ſuperficies ſphæræ æqualis eſt rectangulo, cujus baſis peripheria circuli radiô ſphæræ deſcripti, altitudo diameter ſphæræ (§. 362.). Tab: XV. Fig: 198.

P R O B L E M A VIII.

552. *Data diametro ſphæræ invenire ſuperficiem ac ſoliditatem ejus.* Tab: XV. Fig: 170.

R E S O L U T I O.

I. Quæratur peripheria circuli radio ſphæræ deſcribendi (§. 432.).

II. Inventa ducatur in diametrum. *Factum eſt ſuperficies ſphæræ.* (§. 551.).

III. Si porro factum hoc ſive ſuperficies ſphæræ multiplicetur per ſextam diametri partem, prodibit ſoliditas ſphæræ (§. 546, 543.).

Ex. gr. Sit diameter 5600‴, erit peripheria circuli 17584‴, adeoqué ſuperficies ſphæ-

ræ

ræ 17584. 5600 = $98470400'''$

Quodſi verò $98470400'''$ *multiplicetur iterum per diametrum, & factum per 6 dividatur; quotus erit* $91905706\frac{2}{3}'''$ *ſoliditas ſphæræ.*

Aliter.

Tab: XV. Fig: 170. I. Quæratur cubus diametri $175616000''$ (§. 529.).

II. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum $175616000''$ numerus 4tus proportionalis $91905706\frac{2}{3}''$ (§. 276. *Arithm.*) qui erit ſoliditas ſphæræ (§. 549.).

SCHOLION.

553. *Segmenta ſphæræ ac ſectores facilius inveniri in analyſi docebimus.*

PROBLEMA IX.

554. *Metiri ſoliditatem ac ſuperficiem corporum regularium.*

RESOLUTIO.

Cubi ſoliditas invenitur per §. 537. Tetraëdrum cum ſit pyramis, & Octaëdrum pyramis geminata, Icoſaëdrum ex viginti py-

yramidibus triangularibus , Dodecàédrum
x duodecim quinquangularibus conſtet,qua-
um baſes in ſuperficie Icosàédri & Dodecàé-
ri ſunt, vertices verò in centro çoëunt (§.
18, 521.); horum corporum ſoliditas habe-
ur per §. 495. Superficies autem eorun-
lem prodit, ſi area figuræ unius, quâ termi-
antur, quæratur (§. 379, 398.), & inven-
a per eum numerum, à quo corpus denomi-
atur, multiplicetur; nempe pro Tetràédro
per 4, pro hexàédro per 6, pro octàédro per
, pro dodecàédro per 12, pro icosàédro per
0 (§. 521.).

PROBLEMA X.

555. *Corporis irregularis cujuscunqué ſoliditatem invenire.* Tab: XV. Fig: 192.

RESOLUTIO.

I. Immitatur corpus parallelepipedo cavo, eiqué aqua aut arena ſuperfundatur, & altitudo aquæ ſeu arenæ AB notetur.

II. Corpore extracto, obſervetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC; ita innoteſcit BC (§. 90. *Arithm:*).

III. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo DFCGEB, menſuretur ejus longitudo FC & latitudo CG atqué altitudo BC, ſoliditasqué per §. 534. inveniatur.

Sit ex. gr. AB 8′, AC 5′, erit BC 3′. Sit porro CF 12′, CG 4′; erit ſoliditas corporis 144′.

SCHOLION.

556. *Quodsi corpus in ejusmodi vas co modè deponi nequeat, ex. gr. si statua imm bilis mensuranda esset; parallelepipedo, prismate quadrangulari circumdari debet.*

COROLLARIUM.

557. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum, m tallum, aut massa quæcunqué pendens libra unam. Hinc componi potest tabula gra tatis diversorum corporum secundùm libr quas pendit pes cubicus corporum.

Quod per praxes hydrostaticas al adhuc modis fieri potest: quemadmodum loco docebitur.

PROBLEMA XI.

558. *Invenire soliditatem corporis ca*

RESOLUTIO.

1mo. *Si corpus cavum in numero geom tricorum corporum non est*; resolutio eadem quæ problematis præcedentis.

2dò. *Quodsi verò fuerit parallelepipedum Prisma, Cylindrus &c.* non solùm soliditas sed superficies quoqué inveniri potest, si

1. Soliditas & superficies totius corporis cavitate inclusa, dein soliditas & superficies cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habet *per hypoth:* inveniatur per §§. 53 537, 538, 543, 552. &

2.

2. Soliditas & ſuperficies cavitatis à ſoliditate & ſuperficie totius corporis ſubtrahatur.

Sit ex. gr. ſoliditas Cylindri cavi ABCD inveniendа; ſitquè diameter totius corporis AB $56''$, *longitudo AC* $2^{\circ}\,4'\,6''$; *erit ſoliditas Cylindri incluſa cavitate* $605'\,592''\,960'''$. *Sit diameter cavitatis* $500'''$, *erit ſoliditas* $482'\,775''\,000'''$, *quæ ex ſupra inventa ſubducta relinquit ſoliditatem corporis cavi* $122'\,817''\,960'''$. Tab: XV. Fig: 193.

CAPUT III.

DE RATIONE SOLIDORUM ET STEREOMETRIA DOLIORUM.

THEOREMA X.

559. *Corpora ſimilia ſunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & ſimilia exiſtunt.* Tab: XV. Fig: 199. 200.

DEMONSTRATIO.

Cùm corpora ex planorum terminanti concurſu oriantur, ſi plana terminantia ſ rint & numero æqualia & ſimilia, corpor ôdem modô determinabuntur (§.107.); er itaqué & ipſa corpora ſimilia (§. 108, 156 *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

560. Cùm in planis ſimilibus anguli h mologi ſint æquales & latera homologa pr portionalia (§.153.), quæ in ſolidis ſunt la tudines atqué altitudines, corpora verò milia componuntur ex planis numero æq libus & ſimilibus (§. 559.), in corpori ſimilibus anguli homologi ſunt æquales 495, 496.), & altitudines altitudinibus, titudines latitudinibus atqué longitudin longitudinibus ſunt proportionales.

COROLLARIUM II.

561. Quoniam corpora regularia pla regularibus, adeoqué ſimilibus (§.94, 153 & ejuſdem quidem ſpeciei numero æqual bus (§. 507, 521.) terminantur; corpo quævis regularia ejuſdem ſpeciei, cubi ſci cet cubis, tetraédra tetraédris &c. ſimil ſunt (§. 559.).

THEOREMA XI.

Tab: XIV. Fig: 168. 169. 562. *Cylindrorum & Conorum ſimilium altitudines ſunt ut radii baſium; axes etiam ſunt, ut radii baſium; & Axes cum radii baſium eundem angulum efficiunt.*

DE

DEMONSTRATIO.

Siquidem Coni & Cylindri non possunt iftingvi, nisi per rationem axis CF vel KL d diametrum basis DE vel NM, atqué angulum CFE, vel KLM (§. 510, 513.); si co- & Cylindri similes sunt, & axes eorum ad iametros basium eandem rationem habent, cum radiis basium eundem angulum effiunt (§. 21, 132. *Arithm:*). *Q. e. unum.*

Cùm in figuris solidis, perinde ac in plais altitudo sit recta ex vertice in basim ad ngulos rectos ducta (§. 197.); in Conis & Cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 510, 513.), adeoqué *per demonstrata*, altitudines in conis rectis & Cylindris diametris basium unt proportionales (§. 142. *Arithm:*). Et quidem si Coni & Cylindri secentur juxta iametros AB, CD, EF, altitudines DG, BH n ΔΔ rectangulis subtendunt eosdem angulos F & D, sive σ & u (§. 202.), sub quibus scilicet axes ad diametros inclinantur, deo axibus (§. 230, 218. *Geometr:* 142. *Arithm:*); consequenter diametris seu radis basium proportionales sunt (§. 141, 157. *Arithm:*). *Q. e. alterum.* Tab: XV. Fig: 189.

THEOREMA XII.

563. *Omnis sphæra est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.

Omnis semicirculus est alteri similis (§. 18.), consequenter cum omnis sphæra de-

 scriba-

ſcribatur ſemicirculo (§.516.); omnis ſphæra eſt alteri ſimilis (§. 156.). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

564. *Omnia Priſmata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides & Coni ſunt in ratione compoſita baſium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex baſibus in altitudines (§. 534, 537, 538, 543.); ergo in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 135. *Arithm:*).

COROLLARIUM I.

565. Quare ſi baſes fuerint æquales, altitudinum; ſi altitudines, baſium rationem habent (§. 155. *Arithm:*).

COROLLARIUM II.

566. Cylindrorum & Conorum baſes ſunt circuli (§. 510, 513.). Circuli ſunt in ratione duplicata diametrorum (§. 408.). Ergo Cylindri & Coni omnes ſunt in ratione compoſita ex ſimplici altitudinum & duplicata diametrorum (§ 164.); *quodſi fuerint ejuſdem altitudinis;* ſunt ut quadrata diametrorum.

COROLLARIUM III.

567. Quare ſi in Cylindris altitudo ſit

dia-

diametro basium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§.135. *Ar:*).

PROBLEMA XII.

568. *Virgam pithometricam construere, cujus ope invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus ex vini cærevisiæ eg. in vase cylindrico contenti.* Tab: XV. Fig: 194.

RESOLUTIO.

I. Diameter AB vasis Cylindrici ABDE uni mensuræ æqualis, quâ ad fluida mensuranda utimur, jungatur lineæ indefinitæ 17 ad angulos rectos (§. 216.).

II. Ex A transferatur in 1 recta A1 rectæ AB æqualis; erit B1 diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.

III. Fiat A2 = B1; erit B2 diameter vasis, quod tres mensuras capit, sed ejusdem denuo altitudinis cum vase ABDE, quod unam tantùm mensuram capit. Eodem modo inveniuntur diametri reliqui A3, A4, A5, A6, A7 &c. quatuor, quinque, sex &c. mensuras capientes.

IV. In unum virgæ latus transferantur divisiones inventæ A1, A2, A3, A4, &c. in alterum verò latus altitudo Cylindri CD uni mensuræ æqualis, quoties fieri potest. Tab:XV. Fig: 195.

Ita factum est, quod e, f.

DEMONSTRATIO.

Cylindri ejusdem altitudinis sunt inter se

Tab: XV. Fig: 194. 195. ut quadrata diametrorum (§. 166.). Erg quadratum diametri vafis duas, tres, quatu &c. menfuras capientis, eft duplum, triplum quadruplum &c. quadrati diametri vafis men furam unam tantùm capientis (§. 417. Quare fi inde radices extrahantur, erunt A A2, A3 &c. diametri ipfi (§. 227. *Arithm* idqué A1 diameter unam, A2 duas, A3 tres A4 quatuor, A5 diameter vafis quinqué men furas capientis. Quod fi itaqué has divifio nes ad Cylindrici vafis diametrum applices conftabit, quot diametri AB unius menfura ABDE in Cylindri majoris diametro conti neantur.

Jam fi porro ope alterius divifionis in al tero virgæ latere factæ longitudinem vafis Cylindrici inveftiges, apparebit, quoties al titudo CD minoris Cylindri in altitudine ma joris reperiatur (§. 86. *Arithm:*). Quare fi in virga adnotatus numerus diametrorum multiplicetur per numerum altitudinum, pro dibit numerus menfurarum cavitatem Cylin dri adimplentium. *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

569. *Ex. gr. Sit diameter AB vafis Cy lindrici 8, altitudo EF 12; erit numerus men furarum, quas capit, 96.*

Hinc etiam apparet Cylindrorum menfu ram conftitui Cylindrum, quemadmodum fo lidorum cæterorum cubum. Unde & virga pithometrica fic conftructa Virga Cylindrica *appellatur. Similiter hic circulorum men fura conftituitur circulus, ficuti omnium fu perficierum menfura quadratum.* SCHO-

SCHOLION II.

570. *Quodſi altitudo vaſis conſtanter eadem retineatur, diametri AB pro menſuris integris, earumqué partibus decimalibus hac ratione inveniuntur.* Sit ex. gr. diameter unius menſuræ 1, ſeu 1000 partium decimalium; *erit ejus quadratum 1000000; cujus pars decima 10000. Inde extracta radix quadrata 0. 316 ſunt partes decimales diametri unius menſuræ, quæ reſpondent diametro Cylindri decimam menſuræ partem continentis, ejuſdem tamen cum Cylindro integro ABDE altitudinis.* Si ex duplo hujus decimæ, ſcilicet 20000, radix extrahatur, *prodit diameter baſis duas decimas unius menſuræ ABDE continentis 0.447, & ita porro.* Et hoc quidem eſt initium; *quodſi vero quadrato diametri unius menſuræ 1000000 addas partem decimam 10000, & ex ſumma extrahas radicem quadratam 1. 049; erit ea diameter vaſis, quæ capit $\frac{1}{10}$ menſuræ &c. &c. hoc eſt, ſi itidem ipſi 1000000 addas duas decimas 200000, & ex ſumma radicem extrahas 1. 095, erit ea diameter vaſis, quæ capit 1 $\frac{2}{10}$ menſuræ.* Ratio patet per demonſtr: Probl: præced. Ut igitur intervalla inter menſuras integras ſubdividantur in partes decimales, ſequens Tabula inſervit.

Dia-

Diametri pro menſuris integris, & earum partibus decimalibus.

		3.0	1.732	6.0	2.449	9. 0	3.000
0.1	0.316	1	1.761	1	2.469	1	3.016
2	447	2	1.788	2	2.488	2	3.033
3	548	3	1.816	3	2.519	3	3.049
4	632	4	1.844	4	2.529	4	3.066
5	707	5	1.871	5	2.549	5	3.082
6	775	6	1.897	6	2.569	6	3.098
7	837	7	1.923	7	2.588	7	3.114
8	894	8	1.949	8	2.607	8	3.130
9	949	9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10. 0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11. 0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.937	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

PROBLEMA XIII.

571. *Invenire soliditatem dolii, hoc est determinare numerum mensurarum, quas capit.*

RESOLUTIO.

I. Conveniente latere virgæ pythometricæ metire longitudinem Dolii AC, & latere altero diametros AB & GH.

II. Cum *per experientiam* dolium habeatur pro Cylindro, cujus basis est circulus medius æquidifferens inter circulos AB & GH, inter diametros AB & GH quæratur numerus medius æquidifferens (§. 299. *Arith:*), qui *diameter æquata* dici solet.

III. Diameter ergo æquata multiplicetur per longitudinem dolii AC; Factum est numerus mensurarum, quas capit dolium (§. 568, 569.).

Ex. gr. *Sit* *AB* = 8
GH = 12

Summa = 20

Semisumma = 10 *Diam: æquata*
AC = 15

Capacitas doli = 150 *Mensurarum.*

SCHOLION.

572. *Si ABDE sit multiplum aliarum ordinariè mensurarum, tabula inservit omnibus molis etiam maximæ doliis. Sit eg. AB DE triplum ordinariæ mensuræ, tum capacitas* Tab: XV. Fig: 194.

tas dolii inventa per tria multiplicanda in exemplo scilicet nostro dolium mensuras ordinarias caperet 450. Dolii non pleni juxta longitudinem jacentis modus mensurandi accuratè desideratur adhuc, quod si erigatur, per problema præsens eodem modò invenitur.

SCHOLION II.

573. *Alii Dolium ex duobus conis truncatis constare existimantes, in soliditatem ejus per §. 544 inquirunt. R. P. CLAVIUS S. J. alia pro duobus conis truncatis, alia pro frusto* sphæroidis Archimedeæ *habet. WALISIUS ea pro frusto fusiparabolici habet. Enimverò cum methodus proposita praxi satis respondeat, reliquæ verò ut ut ex profundiori geometria derivatæ, molestiores sint, illa contenti esse possumus necquidquam ultra etiam de* virga cubica additūri.

THEOREMA XIV.

Tab: XV. Fig: 197. 574. *Sphæræ sunt ut cubi diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Tab: I. Fig: 8. Si semicirculi C & c cum dimidiis quadratis sibi circumscriptis circa diametros suos revolvantur, describentur & sphæræ & Cylindri (§. 510, 516.); idqué similes (§. 156.); erit ergo Cylindrus ad Cylindrum, ut sphæra ad sphæram (§. 126. *Arithm:*), sed ejusmodi Cylindrus ad Cylindrum est ut cubus diametri ad cubum diametri (§. 567.);

ergo

ergo etiam ſphæræ in eadem ratione exiſtunt (§. 126. *Arithm:*). *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

575. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis eſt diametro baſeos, eſt ad cubum diametri ut 785 ad 1000.*

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit baſis 7850 (§. 432.). Quia vero altitudo DC = AB *per hypoth:* Soliditas Cylindri erit 785000 (§. 538.); cubi autem AB 1000000 (§. 529.). Ergo Cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 155. *Arithm:*). *Q. e. d.* Tab: XV. Fig: 194. n. 1.

THEOREMA XVI.

576. *Æqualia Parallelepipeda, Priſmata, Cylindri, Coni & Pyramides reciprocant baſes & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora ſint æqualia, facta ex baſibus in altitudinem ſunt æqualia (§. 534.) &c. Ergo baſes & altitudines reciprocant (§. 271. *Arithm:*).

COROLLARIUM.

577. Facilè igitur unum in aliud alterius baſis vel altitudinis transformatur (§. 378.).

PRO-

PROBLEMA XIV.

578 *Invenire cubum dato corpori æqualem, vel qui sit ad hoc in data quacunqué ratione eg. ut 3 ad 1.*

RESOLUTIO.

I. Inveniatur soliditas corporis per Problemata *cap: præced:* tradita.

II. Ex ea vel ejus submultiplo aut multiplo ex. gr. triplo extrahatur radix cubica (§. 254. *Arithm:*); quæ erit latus cubi desiderati (§. 529, *Geom:* 220. *Arithm:*).

Ex. gr. Sit soliditas Cylindri $107^{\circ}\ 1\ldots\ 875''$, *reperietur latus cubi* $4^{\circ}\ 7'\ 5''$.

PROBLEMA XV.

579. *Corpora geometrica quæcunqué in alia æqualia diversi generis transformare data basi vel altitudine.*

RESOLUTIO.

I. Si detur basis, soliditas corporis dividatur per eam; quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis & Cylindris, (§. 534, 537, 538 & 184. *Arithm:*), tertia verò pars in pyramidibus atqué conis (§. 543. *Geom:* & §. *cit: Arithm:*). *Q. e. d.*

II. Si altitudo detur, soliditas corporis dividatur vel per eam totam, ut habeatur basis

fis prifmatum, parallelopipedorum & cylindrorum: *vel per 3tiam ejufdem partem*, ut habeatur bafis pyramidum & conorum (§§. cit:).

III. Inventa aut data area bafeos *1mò* difcerpatur in factores duos, ut habeatur latitudo & longitudo bafis in parallelepipedis, prifmatis triangularibus, & multangularibus (§. 374, 379, 398, 503, 508.). *2dò.* Pro parallelepipedi itaque bafi factorum alter pro longitudine, pro altitudine alter affumendus (§. 362.). Pro prifmate verò triangulari unus præterea per 2 multiplicandus (§. 379.). Pro multangulari demum prifmate unus factorum per dimidium numerum laterum dividendus; ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 398.).

IV. Pro Cylindro & cono ex bafi inventa quærenda porro ejus diameter (§. 437.).

Ex. gr. Sit foliditas alicujus corporis $3^{\circ}\ 456'\ 978''$. *Inveniri debet Cylindrus, cujus altitudo* $2^{\circ}\ 4'\ 6''$. *Reperietur bafis* $1^{\circ}\ 40'\ 53''$ *ferme; diameter* $134''$.

SCHOLION.

580. *Quodfi dentur bafes & altitudines corporum, foliditas ut præterea detur, opus non eft, fi geometrica conftructione utamur. Id quod exemplo uno alterove illuftrare lubet.* Sit prifma triangulare BAD transfor- Tab: XIV. Fig: 166.

man-

mandum in parallelepipedum; *basis BAC convertatur in rectangulum* (§. 380.), *dein duo rectangula ejusmodi sibi addantur;* (§.
Tab: XIV. Fig: 167. *394, 536.), proqué basi NLIQ ponantur, altitudo verò prismatis CD sit altitudo IK. Erit parallelepipedum LKON æquale prismati BAD* (§. 534, 537.).

Similiter si parallelepipedum LKPN in Cylin-
Tab:XIV. Fig. 168. drum ABED commutandum; *mutetur basis NLIK in circulum DFE per* §. 438, *& altitudo IK fiat æqualis CF. Erit parallelepipedum æquale Cylindro* (§. 534, 538.).
Tab:XIV. Fig: 169. Jam verò si parallelepipedum commutandum in conum NKM, *vel baseos parallelepipedi NLIQ triplum pro basi coni NLM sub altitudine KL* = *IK ponendum, vel è contra sub eadem basi altitudo Coni KL tripla ipsius altitudinis IK assumenda* (§. 543, 536.).

THEOREMA XVII.

581. *Corpora similia, Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides atqué Coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemqué altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 564.), sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 400, 408.), & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 560.), ergo corpora ipsa in ratione triplicata laterum homologorum, itemqué altitudinum sunt (§. 135. *Ar:*). *Q.e.d.* PRO-

PROBLEMA XVI.

§82. *Augere, vel minuere corpora geometrica in ratione data, quæ ſint ſimilia datis.*

RESOLUTIO.

I. Pro cubis & ſphæris inter latus aut diametrum ſphæræ & ejus multiplum vel ſubmultiplum inveniantur duæ mediæ continuæ proportionales (§. 314.), & ſuper prima inventa media proportionali deſcribantur corpora (§. 524.).

II. Pro Conis & Cylindris idem fiat inter baſis diametrum & ejus multiplum vel ſubmultiplum, inter altitudinem & ejus itidem multiplum vel ſubmultiplum.

III. Pro reliquis demum corporibus inter altitudinem & longitudinem baſium, inter corporum quoqué altitudinem, atqué earundem multipla vel ſubmultipla dictæ duæ mediæ continuæ proportionales quærendæ &c.

DEMONSTRATIO.

Siquidem corpora augenda ſimilia datis *per hypotheſes* eſſe debeant, erit cubus A ad cubum B, aut quæcunqué alia corpora in ratione triplicata quorumcunqué laterum mn & xz (§. 581.); ſed cum rectæ quatuor proportionales continuæ ponantur *per conſtruct:* eſt etiam mn ad TR in ratione triplicata earundem mn & xz (§. 190. *Arithm:*), conſequenter A : B = mn : TR (§. 141. *Ar:*). Tab: XV. Fig: 199.

Si igitur TR : mn = 3 : 1 vel 3 ad 8, erit etiam B ; A = 3 : 1 vel 3 ad 8 (§.126. *Ar.*) *Q. e. d.*

SCHOLION.

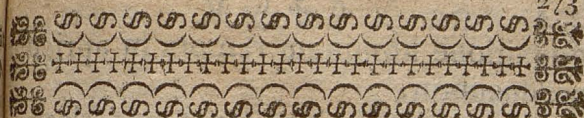
583. *Per hoc Problema* in Circinis proportionum *pro augendis solidis, quibuscunque, & in* Regula Calibræ *pro augendis globis tormentariis* (Calibra est diameter globi tormentarii vel ipsius tormenti paulò minor) *exdividitur recta linea in partes ejusmodi, ut pars ima sit æqualis diametro globi, partes verò reliquæ sint ad primam, ut diametri globorum duarum trium &c. librarum ad diametrum globi libræ unius.*

Tab: XV. Fig: 200. In exemplo assumpto si diameter sphæræ S sive globi esset TR & globi S diameter XZ, globusque S appenderet libras 120; globus S easdem libras 40 contineret.

Finis Elementorum Geometriæ

D. O. M. H.

*****



ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

PRÆFATIO.

MOMENTI perquam exigui tyronibus videtur Trigonometria, utilitatis prorſus nullius. Enimvero rerum Mathematicarum periti ore unanimi confitentur, quod, ſublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Matheſi admiramur. Certè ſtellarum magnitudinem, diſtantiam à terra, motum, Eclipſium tam ſolarium, quam lunarium computum, magnitudinem Globi terraquei; & innumera alia prorſus ignoraremus, ſi nobiliſſimæ hujus ſcientiæ auxilio deſtitueremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, quâ maximè abſcondita & à

gognitione hominum remota in apricum producuntur.

Eam qui nescit, non magnos in Mathesi mixta sentiet progressus: sæpius ipsi in Philosophia naturali hærebit aqua, ex.gr. Iridis phænomena ad rationes suas revocaturo, aliaqué meteora emphatica explicaturo. Studium igitur Trigonometriæ addiscendæ afferatur indefessum, nec impatiens sit mora, donec in partibus Matheseos subsequentibus ineffabilis ejusdem usus ex his ipsis etiam Elementis patescat. Fides oculata impediet, quominus in posterum judicia de rerum usu (quod vulgo plerumqué fieri solet) præcipitemus. Paucis Problematibus comprehendi, quæ alias per casus plures distribuuntur. In Elementis enim præter necessitatem multiplicanda non sunt, quæ spinosa videntur tyronibus, nec culpatur brevitas, quæ perspicuitati non officit, memoriæ levamen certissimum existit. Cumqué Trigonometria etiam in Geometria practica usum habeat, quam cum Theoretica conjungi consultum duximus; ideo hunc usum sub finem annectere placuit.

ELE-



ELEMENTA RRIGONOMETRIÆ PLANÆ



CAPUT I.

DE CONSTRUCTIONE CANONIS SINUUM, TANGENTIUM, ATQUE SECANTIUM, TAM NATURALIUM, QUAM ARTIFICIALIUM.

DEFINITIO I.

I.

T*Rigonometria plana* eſt ſcientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas.

Tab: Trig. Fig: 1. Ex. gr. Ex *duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui A & C cum latere tertio BC.*

DEFINITIO II.

Tab: Trig. Fig: 2. 2. *Sinus rectus* AD arcûs AE vel AI est chordæ AB arcûs dupli AEB vel AIB dimidium. *Sinus totus* est radius HC seu sinus quadrantis HE. *Sinus versus* est pars radii ED inter sinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 272. *Geom:*); consequenter sinus omnes eidem radio insistentes inter se paralleli (§. 217. *Geom:*).

COROLLARIUM II.

Tab: Trig. Fig: 2. 4. Quoniam arcus AE est mensura anguli ACE, & arcus AI mensura anguli contigui ACI, sinus autem est chordæ dictorum arcuum dimidium (§. 2.), duo anguli deinceps positi ACE & ACI eundem sinum AD rectum, & ED versum habent.

COROLLARIUM III.

5. Cùm HE utpote quadrans sit mensura anguli recti (§. 125. *Geom:*), erit HC sinus totus sinus anguli recti (§. 2.). Angulorum adeò obtusorum sinus iidem sunt, quos habent complementa ad duos rectos (§. 4. & §. 126. *Geom:*).

DE-

DEFINITIO III.

6. *Tangens* arcus EA eſt portio rectæ tangentis circulum EF inter rectas ex centro C per extrema arcûs E & A ductas interceptæ. Recta FC dicitur *ſecans* ejuſdem arcûs. **Tab: Trig. Fig: 2.**

COROLLARIUM.

7. Eſt etiam FE tangens, & FC ſecans angulorum ACE, & ACI (§. 48. *Geom:*). Duo igitur anguli deinceps poſiti eandem habent tangentem atqué ſecantem.

DEFINITIO IV.

8. *Coſinus* eſt ſinus, *Cotangens* tangens, *Coſecans* ſecans arcûs AH, qui eſt alterius AE complementum ad quadrantem. *Ita* ex. gr. AG ſinus arcûs AH dicitur coſinus arcûs AE. Vocantur etiam *Sinus, Tangentes, atqué Secantes Complementi.* **Tab: Trig. Fig: 2.**

THEOREMA I.

9. *Sinus arcuum ſimilium ad radios ſuos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum ſimilium ad radios eandem rationem habent (§. 271. *Geom:*). Sed Sinus ſunt chordarum dimidia (§. 2.); ergo & hi ad radios eandem rationem habent (§. 163. *Arithm:*). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS.

10. *Sumatur radius pro unitate; & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas sinuum tangentium atqué secantium, tam cuilibet gradui usqué ad 90, quam etiam cuilibet minuto primo usqué ad 60 respendentium.*

SCHOLION.

11. *Ex* PTOLEMÆI Almagesto *discimus Veteres radium in 60 partes, quas gradus vocabant, divisisse, & inde chordas per minuta prima, secunda, 3tia &c. hoc est per fractiones radii sexagesimales determinasse, quibus in Analysi triangulorum utebantur.*

Dimidiis chordis, *seu* sinibus, *primum usi sunt, quantum constat,* Saraceni. *In tabulis Sinuum & Tangentium ordinariis radius concipitur in 10000000 partes divisus, & ultra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur.* JO. tamen REGIOMONTANUS, NICOL. COPERNICUS, RHETICUS, VALENT. OTHO, *qui tabulas istas construxerunt, ad fractiones multò minores istis descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis assignabilis. RHETICUS ut haberet sinus ad radium 10000000000, assumpsit radium 100 000, 00000, 00000, & à sinibus per hunc repertis præscidit 5 notas primas. Quô artificiô obtinetur ut notæ residuæ omnes veræ existant, ac proinde sinus ita reperti à veris neque ultima integra parte radii deficiant.*

Et

Et tales ſunt ſinus omnes in tabulis vulgaribus. Logarithmi quoqué ad hos numeros à NEPERO, BBRIGGIO & VLACCO accommodati. NEPERUS, *qui ımus Logarithmos in Trigonometriam introduxit, ſinus totius logarithmum facit o. Hinc creſcunt logarithmi ſinuum, ſinibus decreſcentibus, & tangentium atqué ſecantium ſinu toto majorum logarithmi ſunt defectivi, ſeu nihiló minores. Dicuntur quoqué hi logarithmi* Sinus & tangentes artificiales. *Quamvis autem Canon ſive tabulæ ſinuum tangentium atqué ſecantium quibus tamen poſtremis hodie opus non habemus, conſtructæ ſint, ne tamen artificium condendi Canonis ejuſmodi lateat,* præcipui modi inveniendorum ſinuum indicandi. Itaqué

COROLLARIUM.

12. Cùm latus hexagoni regularis ſextam circuli partem ſive arcum 30 graduum ſubtendat (§. 92, 323. *Geom:*) atqué radio æquale ſit (§. 337. *Geom:*), ſiquidem ſinus totus ſive radius eſt 1000000 (§. 11.), erit ejus dimidium, ſive ſinus graduum 30 = 5000000 (§. 2.).

PROBLEMA I.

13. *Invenire Sinum 45 graduum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Sit HI circuli quadrans; erit HI angulus **Tab: Trig. Fig: 2.**

rectus

rectus (§. 125. *Geom:*), consequenter $HI^2 = HC^2 + CI^2$ (§ 415. *Geom:*) $= 2HC^2$ (§. 32, 353. *Geom:*). Quare cum HC sinus totus (§. 2.) sit 10000000 (§. 11.); si ex $2 HC^2$ 200000000000000 extrahatur radix 14142136 (§. 213. *Arithm:*); prodibit chorda HI (§. 218. *Arithm:*), cujus dimidium 7071068 sinus 45 graduum desideratus. *Q. e. i. & d.*

PROBLEMA II.

Tab: Trig. Fig: 2. 14. *Dato sinu AD invenire cosinum AG.*

RESOLUTIO.

Quia AG = DC (§. 3, & 217, 196. *Geom:*).

I. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinûs AD, relinquetur quadratum cosinûs AG (§. 115. *Geom:*). Unde si

II. Radix quadrata extrahatur, prodibit cosinus AG.

Ex. gr. *Sit AC 10000000, AD 5000000; reperietur AG 8660254, sinus 60 gr.*

COROLLARIUM.

15. Cosinu AG vel DC subtracto ex sinu toto EC vel AC, remanet sinus versus ED.

PROBLEMA III.

16.

16. *Dato ſinu AD invenire ſinum arcûs dimidii AE.* Tab: Trig. Fig: 2.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcûs AE (§. 427. *Geom:*). Hujus dimidium eſt ejus ſinus (§. 2.).

Ex. gr. *Sint AC & AD ut in Probl: præced: invenietur arcus dimidii AE ſinus, ſive 15 gr* = 2588190.

PROBLEMA IV.

17. *Dato ſinu DG arcus DF; invenire ſinum DE arcus dupli DB.* Tab: Trig. Fig: 3.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cùm anguli ad E & G recti ſint (§. 3.) & angulus B utriqué Δlo BCG & BDE communis; erit BC : CG = BD : DE (§. 230. *Geom:*). Quare cum CG inveniri poſſit dato ſinu DG (§. 14.), & BD ſit duplum ipſius DG (§. 2.); invenietur quoqué DE (§. 276. *Arithm:*). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

18. *His atqué aliis modis ſinus ſingulorum graduum & minutorum usqué ad quadrantem, tot enim ſufficiunt (§. 4.), reperti ſunt.* URSINUS * *docet, quomodo ex ſinu omnium primi, ex. gr. unius ſecundi per ſolam quaſi additionem & ſubtractionem totus Canon componatur. Faciliùs inveniuntur tangen-*

* Trigon: l. 2. c. 5. p. 164.

tangentes & *secantes; quemadmodum ex problemate sequente patebit. Sinuum, Tangentium atque Secantium Canon junctus simul,* Canon triangulorum naturalis *dici solet, quia triangulorum Analysi inservit.*

PROBLEMA V.

Tab: Trig. Fig: 2. 19. *Dato sinu AD arcûs AE invenire tangentem EF, & secantem FC ejusdem arcûs.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quia sinus AD & tangens EF ad radium EC perpendicularis (§. 3 & 289. *Geom:*), erit ille huic parallelus (§. 217. *Geom:*). Quare ut Cosinus DC ad sinum AD, ita Sinus totus EC ad tangentem EF: item ut cosinus DC ad sinum totum AC, ita sinus totus EC ad secantem CF (§. 230. *Geom:*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram secans FC (§. 276 *Arithm:*). *Q. e. i. & d.*

PROBLEMA VI.

20. *Invenire sinus cujuscunque dati logarithmum.*

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eò accuratiores inveniantur, assumendi sunt sinus ad radium 10,000,000,000 constructi. Resecantur verò sinus 4 notis ultimis in Canone PITISCI majore. Cùm adeò sinus sint numeri 10 ut plurimum notarum, in Canone autem logarithmorum, qui

qui proſtat, maximo numeri naturales ſunt 5 tantùm notarum, logarithmi eorum inveniuntur *per Probl: 32 Arithm: §. 328.* Utendum verò Canone Logar: majore.

Ex. gr. *Sit inveniendus logarithmus ſinûs gr. 23, qui apud Pitiſcum eſt 3907311284. Reſectis versùs ſiniſtram 5 notis 39073, ipſis reſpondens in Canone logarithmus eſt 4. 5918768, conſequenter logarithmus numeri 3907300000 eſt 9. 5918768* (§.327.Arith:). *Differentia tabularis eſt 111. Quare infertur ut 100000 ad 111, ita notæ reſiduæ ſinûs dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12; qui ſi addatur logarithmo 9. 5918 768, prodit logarithmus quæſitus 9.5918780; qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.*

PROBLEMA VII.

21. *Invenire logarithmum tangentis dato logarithmo ſinûs & Coſinus.* Tab: Trig. Fig. 2.

RESOLUTIO.

I. Logarithmus ſinus addatur logarithmo ſinus totius.

II. A ſumma ſubtrahatur logarithmo coſino.

Reſiduum eſt logarithmus tangentis (§. 19, 342. *Arithm:*).

COROLLARIUM.

22. Quodſi detur ſinus complementi; invenietur logarithmus ſecantis, ſi *1mò* logar: ſinus totius multiplicetur per 2, & *2dò* ab ejus duplo ſubtrahatur ſinus complementi datus (§. 19 & 342. *Ar:*). CA-

CAPUT II.

DE ANALYSI TRIANGULORUM.

THEOREMA II.

Tab: Trig. Fig: 2

23. *Tangens* 45° *EF æquatur radio EC.*

DEMONSTRATIO.

Arcus AE 45° *per hypoth:* ergo & angulus ACE 45 gr (§. 49. *Geom:*); consequenter angulus F 45 gr. (§. 208. *Geom:*). Quare EF = CE (§. 161. *Geom:*). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Tab: Trig. Fig. 1.

24. *In omni triangulo ABC latera sunt ut sinus angulorum sibi oppositorum.*

DEMONSTRATIO.

Cùm omne triangulum circulo inscriptibile sit (§. 278. *Geom:*), erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 31. *Geom:*): consequenter latera dimidia sinus arcuum dimidiorum (§. 2.); cùm verò arcus dimidii sint mensuræ angulorum oppositorum (§. 295. *Geom:*). erunt latera dimidia

midia sinus angulorum sibi oppositorum (§. 2.). Ergo ut totum ad totum, ita dimidium ad dimidium; hoc est ut latus AC ad sinum anguli sibi oppositi B, ita latus BC ad sinum anguli sibi oppositi A; ita etiam AB ad sinum anguli sibi oppositi C (§. 145. *Ar:*). *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

25. *Datis duobus angulis A & C una cum latere AB uni eorum C opposito invenire latus BC oppositum alteri angulo A.* Tab: Trig. Fig: 2.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 24.)
Ut sinus anguli C
Ad latus sibi oppositum datum AB
Ita sinus anguli alterius A
Ad latus quæsitum BC.
Invenietur adeo logarithmorum ope BC per §. 342. *Arithm.*

Ex. gr. Sit C 48° 35', AB 74, A 57° 28', calculus erit:

Logar: Sin: C	9.8750142
Log: AB	1.8692317
Log: Sin: A	9.9258681
Sum: Log: AB & Sin: A	11.7950998
Logar BC	1.9200857

Cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent 83. Cùm verò loga-

garithmus in tabulis non exactus reperiatur, inveniri possunt numeri inventi 83 fractiones decimales, hoc est in casu nostro digiti & lineæ, si sub characteristica 2 post 8300 denuò logarithmus ipsius BC evolvatur, cui proximè respondet numerus 8319.

Est ergo BC 8° 3' 1'' 9''' (§. 337. Arithm.). *Quodsi fuerit characteristica 3, obtinebuntur fractiones decimales per* §. 336. Arithm.

PROBLEMA IX.

Tab: Trig. Fig: 1. 26. *Datis duobus lateribus AB & BC, unà cum angulo C uni eorum opposito; invenire angulos reliquos A & B.*

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 24.)
Ut latus AB
Ad Sinum anguli sibi oppositi C;
Ita latus alterum BC
Ad Sinum anguli quæsiti sibi oppositi A.

Ex. gr. Sit AB 94', *BC* 69', *C* 72° 15'

Log:	AB	1.973128
Log: Sin:	C	9.978817
Log:	BC	1.838849
Sum: Log: Sin: C & BC		11.817666
Log: Sin:	A	9.844553

Cui in Canone proximè respondent 44° 19'

Quodsi

Quodsi Canon major non fuerit ad manus, & præter scrupula prima etiam secunda desiderentur, vi Probl: 34 Arithm: §. 336. *hoc modo inveniuntur.*

logarithmo invento 9.8445387 subtrahe
Tabul: prox: min: 9.8445018

notetur Differen: 1ma 369
Simil: ex prox: maj: 9.8446310 Subduc
prox: min: 9.8445018

notetur Differ: 2da 1292
Inferatur, 1292 : 60 = 369
2) 646 : 30 = 369 : 17

		°	′	″
Est ergo angulus	A =	44	21	17
Sed	C =	72	15	0
Quare	A + C =	116	36	17
Quon:	A + C + B =	179	59	60 (§. 207. *Geom:*).
erit	B =	63	23	43 (§. 212. *Geom:*).

Similiter dentur in triangulo rectangulo præter rectum A, hypothenusa BC, & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49″, *AC* 36′, *Calculus erit:* Tab: Trig. Fig: 4.

Log: BC	1.6901961
Log: Sin: tot:	10.0000000
Log: AC	1.5563025

T Log:

Log: Sin: B 9.8661064, cui

Canone proxime respondent $47^{\circ} 16'$.

Ergo C $42^{\circ} 44'$ (§. 208. *Geom:*).

Tab: Trig. Fig: 6. 2*dò*. Quodsi latus AG vel AB dato angulo C oppositum fuerit minus latere AC, quæsitus angulus & obtusus esse potest G, & acutus B (§. 204.), adeoqué constare debet utrum triangulum datum sit obtusangulum an acutangulum. In casu itaqué priori omnia fiunt ut num. 1. Postquam verò inventus fuerit ang: acutus, sumitur complementum ejus ad 180 grad: pro obtuso.

Tab: Trig. Fig: 6. *Ex. gr. Sit in* Δ*lo obtusang: AGC, AG* $349''$, *AC* $382''$, *ang: C* $57^{\circ} 25'$; *erit*

Log: AG	2.5428254
Log: Sin: C	9.9256261
Log: AC	2.5820634
Sum: Log: C & AC	12.5076895
Logar: Sin: G	9.9648641,

Cui in Canone proximè respondent $67^{\circ} 15'$.

Est igitur angulo acut: G in Δ *AEG* $67^{\circ} 15'$; *quem si subtraxeris ex 180 gr. remanent pro obtuso AGC 112 gr. 45 min.*

Tab: Trig. Fig: 6. 3*tiò*. Quodsi angulus datus G in Δ GAC fuerit obtusus, & datis præterea cruribus AG

G & AC, quæratur acutus; in solutione pro nu obtusi anguli AGC sumitur deinceps po- ti acuti anguli AGE sinus.

Ex. gr. Sit angulus obtusus G $165^{\circ}\ 17'$, *G* $179''$; *AC* $223''$, *& quæratur acutus C, rit.*

Log: AC	2.3483049
Log: Sin: AGE	9.4049009
Log: AG	2.2528530
Sum:Log:Sin:G & AG	11.6577539.
Log: Sin: C.	9.3094490.

Cui in Canone respondent quam proximè gr. 46 min.

LEMMA.

27. *Si à semisumma duarum quantitatum btrahatur semidifferentia, relinquitur quan- tas minor; si vero illi hæc addatur, prodit uantitas major.*

DEMONSTRATIO.

Numerus major componitur ex minore & ifferentia (§. 56. *Arithm:*). Ergo summa x minore bis sumpto & differentia, conse- uenter semisumma ex minore & semidifferē- a. Quare si à semisumma semidifferent a btrahatur, minor quantitas relinquitur (§. it:). *Q. e. unum.*

Quodsi vero semisummæ semidifferentia ddatur, aggregatum erit compositum ex

quantitate minore & differentia (§. 53. *rithm:*), adeoque numerus major *per monstr: Q. e. alterum.*

PROBLEMA X.

Tab: Trig. Fig: 4. 28. *Datis duobus lateribus BA & cum angulo intercepto A; invenire angu reliquos.*

RESOLUTIO.

1mò. Si triangulum ABC fuerit rectang lum; assumpto crure uno circa rectum a AB pro radio, erit alterum CA tangens guli oppositi B (§. 6, & 289. *Geom:*); feratur ergo

Ut crus unum AB
Ad alterum AC
Ita sinus totus
An tangentem anguli B.

Ex. gr. *Sit BA 79, AC 54; erit*

Log: BA	1.8976271
Log: AC	1.7323938
Log: Sin: tot:	10.0000000
Log: tang: B	9.8347667,

in Canone respondent 34 gr. 21 min. Er *angulus C 55 gr. 39 min* (§. 208. Geom:

Tab: Trig. Fig: 7. *2dò.* Si angulus A fuerit obliquus;

I. Inferatur

Ut summa laterum datorum AB & AC differentiam eorundem,

Ita tangens semisummæ angulorum qu torum C & B

Ad tangentem ſemidifferentiæ eorundem.
II. Addatur ſemidifferentia ad ſemiſummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem ſemidif: à ſemiſumma ſubtrahatur, reſiduus fiet angulus minor B.

Ex.gr. Sit $AB\ 75'$, $AC\ 58'$, $A\ 108^{\circ}\ 24'$, *erit*

$AB\ 75, AB\ 75,$	$A+B+C$	$179^{\circ}\ 60'$
$AC\ 58, AC\ 58.$	A	$108\ 24$
Sum:133. Dif:17	$B+C$	$71\ 36$
	$\frac{1}{2}(B+C)$	$35\ 48$

Log: AB + AC	2.1238516
Log: AB — AC	1.2304489
Log:tang: $\frac{1}{2}$(B+C).	9.8580694
Sum: Logar:	11.0885183

Logar:tang: $\frac{1}{2}$(C—B), 8.9646667, cui tabulis proximè reſpondent $5^{\circ}\ 16'$.

$(B+C) = 35^{\circ}\ 48'$, $\frac{1}{2}(B+C) = 35^{\circ}\ 48'$

$(C—B) = 5\ 16$, $\frac{1}{2}(C—B) = 5\ 16$

$C = 41^{\circ}\ 4'$. $B = 30^{\circ}$

DEMONSTRATIO.

Tab: Trig. Fig: 7. Crure majore dato AB ex vertice anguli dati A deſcribatur circulus (§. 116. *Geom:*) & crus minus AC utrinque continuetur, donec circulo in E & D occurrat. Erit ergo AE = AB = AD (§. 33. *Geom:*) & ſumma laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§. *Geom:*); erit EBD ſemicirculus (§. *Geom:*); conſequenter angulus EBD rectus (§. 298. *Geom:*), adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 67. *Geom:*). Quare ſi BD ſumatur pro ſinu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 6, & 289. *Geom:*). Eſt verò o = x + y (§. 206. *Geom:*), & inde

$u = \frac{1}{2} o$ (§. 294. *Geom:*), $u = \frac{1}{2}(x + y)$ (§. 84, 77. *Arithm:*); Ergo EB tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum x & y. Quoniam x = u + n (§. 206. *Geom:*) erit n ſemidifferentia angulorum x & y (§. 27.). Sumpto itaque DB denuo pro radio ſi deſcribatur arcus DG (§. 116. *Geom:*) & in D erigatur perpendicularis DE (§. *Geom:*), erit DF tangens anguli n (§. 6, 289. *Geom.*), hoc eſt, ſemidifferentiæ angulorum quæſitorum x & y *per demonſtr.* Jam cum anguli EBD & FDB ſint recti (*per demonſtr:* & hinc FD & EB parallelæ (§. 217.

217. *Geom:)*, ang: BED = FDE (§. 202. *Geom:)*,item x = r (§. 140. *Geom:)*, erit CE: CD = EB: DF (§. 230. *Geom:)*. Inventa itaqué per tangentem angulorum quæsitorum semidifferentia, reliqua in resolutione manifesta sunt per §. 27. *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

29. *Datis tribus lateribus AB, BC & CA invenire angulos A, B & C.* Tab: Trig. Fig: 6.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Ex vertice anguli A, latere minimo AB, describatur circulus (§. 116. *Geom:)*; erit ob AD = AB (§. 32. *Geom:)* CD summa crurum AC & AB; CF verò differentia eorundem.

Et ideo inferre licet (§. 317. *Geometr:)*
ut basis BC
ad summam crurum CD;
ita differentia crurum CF
ad segmentum basis CG.

II. Inventum adeo segmentum CG (§. 276. *Arithm:)* si subtrahatur à basi CB, relinquitur chorda GB.

III. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 187. *Geom:)*, erit BE $= EG = \frac{1}{2}$ GB (§. 272. *Geom:)*. Datis adeo in $\triangle$ rectang: AEB lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atqué C per §. 26.

Ex. gr. Sit AB 36', *AC* 45', *BC* 40' *er*

AC = 45'   AC = 45'
AB = 36   AB = 36

AC + AB = 81   FC = 9

Log: BC = 1.6020600
Log: AC + AB = 1.9084850
Log: FC = 0.9542425

Summ: Log: = 2.8627275

Log: CG = 1.2606675,
cui in Tabulis quàm proximè respond
18' 2'' 2''' (§. 336. Arithm:).

BC = 4000'''   EG = 10[illegible]
CG = 1822   CG = 18[illegible]

BE = 2178   CE = 29[illegible]

BG = 1089

Log: AB = 3.5563025
Log: Sin: tot: = 10.0000000
Log: EB = 3.0370279

Log: Sin: EAB = 9.4807254
cui in Tabulis quàm proxime respond
17° 36', adeoquè angulus ABE 72° 24'
(§. 208. *Geom:*).

Log: AC = 3.6532125
Log: Sin: tot: = 10.0000000
Log

Log: CE = 3.4640422

Logar: Sin: EAC = 9.8108297, *cui in Tabulis quàm proximè respondent* $40^{\circ}\ 18'$.

Ergo ACE $49^{\circ}\ 42'$ (§. 208. *Geom:*), & CAB $57^{\circ}\ 54'$ (§. 85. *Arithm:*).

CAPUT III.

DE USU TRIGONOMETRIÆ PLANÆ IN GEOMETRIA PRACTICA.

PROBLEMA XII.

30. *Construere instrumentum transportatorium rectilineum, hoc est, scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensæ arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

I. Ex communi Canone Sinuum sumantur

Sinus

Sinus arcuum $2^\circ 30'$, 5°, $7^\circ 30'$, 10°, $12^\circ 30'$ &c nempe in progressione Arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia $\frac{1}{2}$. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§. 2.) hic in tabella ponuntur.

G.	Chor: dimid	Ch: int:	G.	Chor: dim:	Cho: inte:
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	462.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

Tab: Trig. Fig: 8. II. Ducatur recta AD, & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 216. *Geom:*) pro arbitrio in 5, 10, viginti &c. partes æquales dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus dimidios, vel 4tas partes gradus &c. indicare debent subtensæ.

III. Per singula divisionum puncta ducantur rectæ ipsi AD parallelæ (§.219. *Geom:*)

IV. In lineam AD incipiendo semper puncto

puncto A transfer particulas chordarum integrarum gradibq 5°, 15°, 25°, 35° &c. respondentes ex scala Geometrica in particulas minutissimas divisa (§. 235. *Geom:*); in linea verò superiori BC eodem modo designentur particulæ chordarum respondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quod si scala Geometrica non contineat particulas adeo minutas, quales desiderantur; utendum est chordis dimidiis: quod perinde est, ac si particulæ in scala bifariam dividerentur. Negligenda autem est nota puncto à reliquis separata, vel si major fuerit ejus loco addenda est unitas ultimæ earum, quæ retinentur. *Ex. gr. loco 258. 8 assume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.*

V. Ducantur transversæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15 &c.

Cùm enim A5, B10 &c. sint chordæ 5, 10 graduum, & chordæ à quinis ad quinos gradus arcubus fere proportionaliter crescant; erit cI subtensa arcûs unius gradûs, d2 subtensa 2 &c. graduum. Est enim AB : BC = A5 : cI (§. 230. *Geom:*), sed BC = $\frac{1}{5}$ AB, ergo etiam cI = $\frac{1}{5}$ A5 (§. 126. *Ar:*). Tab: Trig. Fig: 9.

COROLLARIUM I.

31. Quia subtensa 60 est radius (§. 337. *Geom:*), anguli quantitatem investigaturus inter- Tab: III. Fig: 44.

intervallo B 60 deſcribat ex vertice anguli intra crura ejus arcum BC, qui eſt menſura ipſius (§. 48. *Geom:*), & ejus chordam ad ſcalam applicet, quæ ſi ex. gr. ex d in 12 pertingat, oſtendit angulum DAE eſſe 12 graduum.

COROLLARIUM II.

Ta: Geom. Fig: 44. 32. Angulus datæ quantitatis conſtruetur, ſi radio B 60 deſcribatur ex centro A arcus CB, & ſubtenſa gradus dati ex gr 12 in ſcala reperta transferatur ex C in D. Erit enim arcus BC menſura anguli A (§.48. *Geom:*), adeoqué tot graduum, quot arcus continet (§. 49. *Geom:*).

SCHOLION.

33. *Hujus inſtrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in ſcrupulis ſatis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA XIII.

34. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & angulis o & y; invenire diagonales.*

RESOLUTIO.

Tab: Trig. Fig: 10. I. In △ ABE datis duobus lateribus AB & AE, unà cum angulo o invenitur *primò* angulus A (§. 26.), dein diagonalis BE (§. 25.).

II.

II. Eodem modo reſoluto △lo BCD invenitur diagonalis BD. *Q.e.f.*

PROBLEMA XIV.

35. *Datis in figura rectilinea quacunquè duobus lateribus AB & BC unà cum diagonalibus BE & BD, atquè angulis o, x & y; invenire latera reliqua CD, DE & EA.* Tab: Trig. Fig: 10.

RESOLUTIO.

I. Datis in △ ABE duobus lateribus AB & BE cum angulo intercepto o, invenitur primò angulus u (§. 28.), & deinde porro AE (§. 25.).

II. Eodem prorſus modo in △△lis reliquis BED & BCD inveniuntur latera ED & DC. *Q.e.f.*

PROBLEMA XV.

36. *Datis in figura rectilinea omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA, & tot angulis, quot ſunt latera, demptis tribus, ſcilicet datis angulis C & D invenire diagonales BD & BE.* Tab: Trig. Fig: 11.

RESOLUTIO.

I. In △lo BCD, datis lateribus BC & CD cum angulo intercepto C, inveſtigetur angulus m (§. 28.), quo ex angulo D ſubducto relinquitur angulus n, atquè porro invenitur diagonalis BD (§. 25.).

II. Datis jam in △lo BDE lateribus BD &

& DE cum angulo intercepto n, eodem prorsus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE. *Q. e. f.*

PROBLEMA XVI.

Tab: Trig. Fig: 11. 37. *Datis in figura rectilinea latere AB una cum angulis o, x, y, e, u & n; invenire diagonales AC, AD, BD & BE una cum lateribus BC & AE.*

RESOLUTIO.

I. Datis in △ ABC angulis o & B = (e + u + n) unà cum latere AB, inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 25.).

II. Similiter datis in △ ABD angulis o + x & e + u unà cum latere AB inveniuntur diagonales BD & AD (§. cit:).

III. Datis denique in △ ABE angulis e & o + x + y unà cum latere AB inveniuntur latus AE & diagonalis BE. *Q. e. f.*

SCHOLION II.

38. *Cùm Ichnographiæ arearum optimè perficiantur datis omnibus lateribus, itemque diagonalibus (§. 345. Geom:), horum Problematum in planimetria usus est insignis. Qui tamen praxi dant operam, molestias calculi fugiunt lucro magis quam accurationi intenti.*

PROBLEMA XVII.

Geometr: Tab: III. Fig: 42. 39. *Metiri distantiam duorum locorum BA ex eodem tertio c accessorum.* RE-

I. Inveniatur quantitas anguli c puncto c d arbitrium aſſumpto (§. 134. *Geom:*), nec on rectarum Bc & Ac (§. 113. *Geom:*).

II. Datis in △ BAc duobus lateribus Ac & Bc cum angulo intercepto c, inveniatur rimùm angulus A (§. 28.), & hinc porro iſtantia AB (§. 25.). *Q. e. f.*

SCHOLION.

40. *Exempla non addimus, cùm Problemata, quibus triangula in hac Trigonometriæ applicatione ſolvuntur, jam in ſuperioribus exemplis ſint illuſtrata, ut tamen de commoda ſtationis c electione judicari poſſit, quædam adhuc addenda ſunt. Nimirum lineas Ac & Bc, quæ ſunt latera trianguli, ſatis accuratè in campo metiri licet (§. 103. Geom:); ſed in metiendo angulo facilè aliquot ſcrupulis imis vel in exceſſu vel in defectu peccamus, cum tamen hoc angulo erroneo in calculo utamur tanquam vero, fieri non poteſt, ut diſtantia vera obtineatur. Quamobrem de quantitate erroris admittendi hic nobis diſpiciendum; de quo etiam in Geometria monuimus §. 251.*

THEOREMA IV.

41. *Si error aliquot ſcrupulorum in quantitate anguli A admittatur, laterum verò BA & AC magnitudo fuerit accurata, erit arculi CD errorem CAD metientis quantitas ad DE differentiam diſtantiæ veræ BC ab erronea per calculum producta BD ut ſinus totus ad ſinum anguli BCA, qui lateri AB opponitur.* Tab: Trig. Fig: 9.

DE-

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi in angulo BAC metiendo peccetur, ut prodeat tantillô major BAD, ob rectarum AC & AD æqualitatem *per hypoth:* △ BAC degenerat in alterum BAD. Deſcribatur ex A intervallo AC tanquam radio arcus CD, qui per punctum D ob AC = AD (§. 32. *Geom:*) neceſſario tranſit. Quoniam angulus CAD aliquot nonniſi ſcrupulorum eſt, arcus exiguus CD, qui eum metitur (§. 48. *Geom:*) pro recta haberi, & ſi ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem menſura determinari poteſt, in qua datur latus AC (§. 439. *Geom:*). Deſcribatur ſimiliter ex centro B intervallo BC arcus CE, qui ex eadem ratione pro recta haberi poterit, eritqué ob BC = BE (§. 32. *Geom:*), ED differentia inter diſtantiam veram BC & erroneam BD; anguli verò ACD, BCE & CED ſunt recti (§. 290. *Geom:*); conſequenter BCE = ACD (§. 127. *Geom*), ideoqué BCA = ECD (§. 81. *Arithm:*). Eſt verò ut ſinus totus ad CD, ita ſinus anguli ECD ſive BCA *per demonſtr:* ad ED (§. 24.); ergo etiam ut ſinus totus ad ſinum anguli BCA, ita CD ad ED (§. 148. *Arithm:*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab: Trig. Fig: 9. 42. Eodem ergo manente errore CD in angulo A metiendo admiſſo, error in diſtantia admiſſus ED major eſt, ſi angulus BCA major fuerit; minor autem, ſi hic quoqué minor fuerit (§. 180, 181. *Arithm:*).

CO-

COROLLARIUM II.

43. Statio itaqué in A ea eligenda, quæ acutum valde efficit angulum BCA (§. 42.); quod obtinetur, si angulus A fuerit major recto (§. 207. *Geom:*) & latus AC > AB (§. 161. *Geom:*).

COROLLARIUM III.

44. Cum angulus BAD major sit angulo BND (§. 168. *Geom:*); præstat eligi stationem A viciniorem, quam remotiorem (§. 42.).

SCHOLION.

45. *Cæterum hinc apparet praxes accuratissimas esse, quæ solis lineis in campo mensuratis nituntur. Dedimus hic specimen aliquod eorum, quæ circa praxim Geometriæ accuratam expendi merentur, ut ostenderemus theoriam accuratam parere praxim accuratam, & ad theoriam perfectè addiscendam excitemus, qui olim praxi operam sunt daturi. Falluntur enim, qui sibi persuadent per theoriam addisci non posse certas praxium accuratarum circumstantias, tum demum observandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumqué tantùm confusè observantur; per theoriam verò accuratè determinantur. Id quod non minus theoria quam praxi CL. MARINONIUS rectè expressit versibus titulo libri sui inscriptis:* Quum satis imbuerint docilem theoremata mentē, sponte sua manibus conciliatur opus.

PROBLEMA XVIII.

Geom. Tab: III. Fig: 41.

46. *Invenire diſtantiam duorum locorum AB, quorum unus A tantùm acceſſibilis.*

RESOLUTIO.

I. Inveſtigetur quantitas angulorum A & C, itemqué rectæ AC (§. 134, 113. *Geom:*).

II. Inveniatur AB (§. 25.).

THEOREMA III.

Tab: Trig. Fig: 13.

47. *Si in diſtantia AB ex duobus angulis A & ACB una cum latere AC inveſtiganda nonniſi in angulo uno ACB metiendo aberretur; arcus BE, qui errorem in angulo BCD admiſſo metitur, erit ad BD differentiam inter diſtantiam veram AB & erroneam AD, ut ſinus anguli tertii o diſtantiæ ſtationum AC oppoſiti ad ſinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Deſcribatur ex centro C, radiô CB arcus BE, qui eſt menſura erroris BCD (§. 48. *Geom:*), cumqué nonniſi paucorum minutorum ſit *ex hypotheſi*, pro recta haberi poteſt. Quare cum anguli BED & CBE ſint recti (§. 290. *Geom:*), erunt anguli o & u (§. 129. *Geom:*), itemqué u & x æquales recto (§. 208.); conſequenter o + u = x + u (§. 127. *Geom:*), & hinc y = x (§. 81. *Arithm:*). Eſt verò ut ſinus anguli x ſive o (*per demonſtr:*) ad arcum BE, ita ſinus totus

ad

ad BD (§. 24.). Ergo BE ad BD, ut ſinus anguli o ad ſinum totum (§. 148. *Arith:*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM I.

48. Cùm ſinus anguli o majorem habeat rationem ad ſinum totum, ſi major, quam ubi minor fuerit (§. 178. *Arithm:*); eodem errore in angulo ACB admiſſo, hoc eſt arcu BE exiſtente eodem, minor error erit in determinanda diſtantia BD, ſi angulus o major, quam ubi fuerit minor (§. 181. *Arithm:*).

COROLLARIUM II.

49. Siquidem angulorum obtuſorum iidem ſunt ſinus, qui acutorum deinceps illis poſitorum (§. 5.), maximus vero ſinus ſit anguli recti (§. 2.); ſtatio in A & C talis eligenda eſt, ut angulus o evadat recto proximus, id quod obtinetur, ſi anguli A & C ſimul ſumpti proxime rectum adæquent (§. 207. *Geom:*).

PROBLEMA XIX.

50. *Invenire diſtantiam duorum locorum inacceſſorum AB.* Tab: Trig. Fig: 14.

RESOLUTIO.

I. Electis 3 ſtationibus D, C & E, menſurentur anguli ACB, D, E & BCE (§. 134 *Geom:*); itemque lineæ DC & CE (§. 113. *Geom:*).

II. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E fubtrahatur ex 180 gr. & relinquitur angulus ACD & CBE (§. 130, 212. *Geom:*), eodem modo inveniatur angulus DAC.

III. Inde inveniantur latera AC & BC (§. 25.), & hinc porro angulus CAB (§. 28.), tandemque AB (§. 25.).

PROBLEMA XX.

Geometr: Tab: VI. Fig: 76.

51. *Invenire altitudinem acceſſibilem BC.*

RESOLUTIO

I. Statione in E electâ, inftrumentô ritè collocato (§. 248. *Geom:*) inveniatur angulus BeC (§. 134. *Geom:*), & diftantia ftationis eC (§. 113. *Geom:*), quæ erit ad CB perpendicularis (§. 197. *Geom:*).

II. Cum itaque C fit rectus (§. 67. *Geom:*), invenietur BC (§. 25.), cui fi addatur AC, prodibit integra AB. *Q. e. inv.*

THEOREMA IV.

Tab: Trig. Fig: 13.

52. *Si in quantitate anguli A inveſtiganda aberretur, erit altitudo vera BD ad falſam BC, ut tangens anguli veri DAB ad tangentem anguli erronei CAB.*

DEMONSTRATIO.

Affumpto AB pro finu toto, erit DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli

li CAB (§. 6.). Sunt itaqué altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

53. Quoniam manente angulo eodem vero & erroneo, eadem eſt ratio altitudinis veræ cujuſcunqué ad erroneam (§. 52.); error plurium erit pedum in altitudine majore, quam in minore (§. 276. *Arithm:*).

COROLLARIUM II.

54. Quia tangentes arcuum angulo recto vel minuto proximorum, hoc eſt arcuum majorum & exiguorum minorē rationem inter ſe habent, quam tangentes mediocrium, ſeu ſemirecto proximorum arcuum (minore ſcilicet tangente ad majorem relata) teſte Canone tangentium & §. 134, 198. *Arith:* ſi idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo, & mediocri, error in altitudine admiſſus major erit in caſu priore, quam in poſteriore (§. 276. *Arithm:*).

SCHOLION.

55. *Sit e.g. angulus verus BAD* 30°, *AB* $67'$, *erit altitudo vera* $3^{\circ}\,8'\,6''$. *Ponamus aſſumi angulum erroneum BAC* 31°, *is producet altitudinem erroneam BC* $4^{\circ}\,0'\,2''$ (§. 25). Tab: Trig. Fig: 13.

Sit

Sit in distantia minore BE angulus DEB recto proximus 86°, & assumatur per errorem angulus 87°; reperietur altitudo erronea $5^{\circ}\,1'\,6''$, quæ erroneam supra inventam excedit $1^{\circ}\,1'\,4''$.

COROLLARIUM III.

56. Quoniam itaqué in distantia minore EB angulus E major est, quàm angulus DAB in distantia majore AB (§. 168. *Geom:*): in metiendis altitudinibus distantia stationis ab altitudine assumenda est mediocris, ita ut angulus DEB prope semirectus sit (§. 250. *Geom:*).

COROLLARIUM IV.

Tab: Trig. Fig. 5. 57. Si instrumenti latus non fuerit horizonti parallelum, sed ex. gr. quantitate anguli BAD versùs horizontem inclinatum, si sumatur AB pro radio, erit CB tangens anguli veri CAB (§. 6.), & iterum si sumatur AD pro sinu toto, erit CD tangens anguli CAD. Eadem ergo hic veritas pro differentia altitudinis veræ à falsa eruitur, quæ §. 52. asserta est. Scilicet esset altitudo vera BC ad falsam CD, ut tangens anguli CAB ad tangentem erronei CAD. Item eodem modo ostenditur, si instrumentum quantitate anguli EAB à situ horizontali reclinetur.

Cæ-

Cæterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioso nempe situ tam lineæ AC, quam AB commissum.

PROBLEMA XXI.

58. *Metiri altitudinem inaccessam AB.* Geometr: Tab: VI. Fig: 77.

RESOLUTIO.

I. Eligantur duæ stationes E & G in eadem recta tanto intervallo se distantes, ut angulus eAf non sit nimis exiguus, nec altera statio nimis vicina altitudini AB (§. 54, 56.).

II. Inveniantur anguli A f C, A e C & C e B (§. 134. *Geom:*), itemqué distantiæ se longitudo (§. 113. *Geom:*).

III. Datis in △ A e f angulis e (§. 206. *Geom:*) f, itemqué latere e f, inveniatur latus e A (§. 25.); deinde in △ A e, C datis angulis e & recto C atqué latere Ae, inveniatur latus AC, itemqué Ce (§. cit:); tandem ex cognitis in △ CeB angulis recto C & e, atqué latere Ce, inveniatur latus CB (§. cit:).

IV. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo AB (§. 85. *Arithm:*).

PROBLEMA XXII.

59. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.* Tab: Trig. Fig: 2.

RE-

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Siquidem radius circuli EC eſt 10000000 (§. 11.), erit ſinus AD atque tangens EF arcus AE unius minuti = 2909 (§. 18.); adeoque arcus AE aliquanto major, quam AD, & minor quam EF (§. 414. *Geom:*) itidem 2909 fere eſſe debet (§. 299. *Ar:*). Multiplicentur 2909 per 21600, hoc eſt per numerum minutorum in peripheria contentorum, productum 62834460 eſt peripheria circuli (§. 33. *Geom:*); eſt ergo diameter ad peripheriam ut 20000000 ad 62834400 fere (§. 126. *Ar:*); id eſt dividendo per 200 000, ut 100 ad 314. (§. 157. *Arit:*) ea ſcilicet, quam etiam in Geometria §. 429 invenimus. *Q. e. i. & d.*

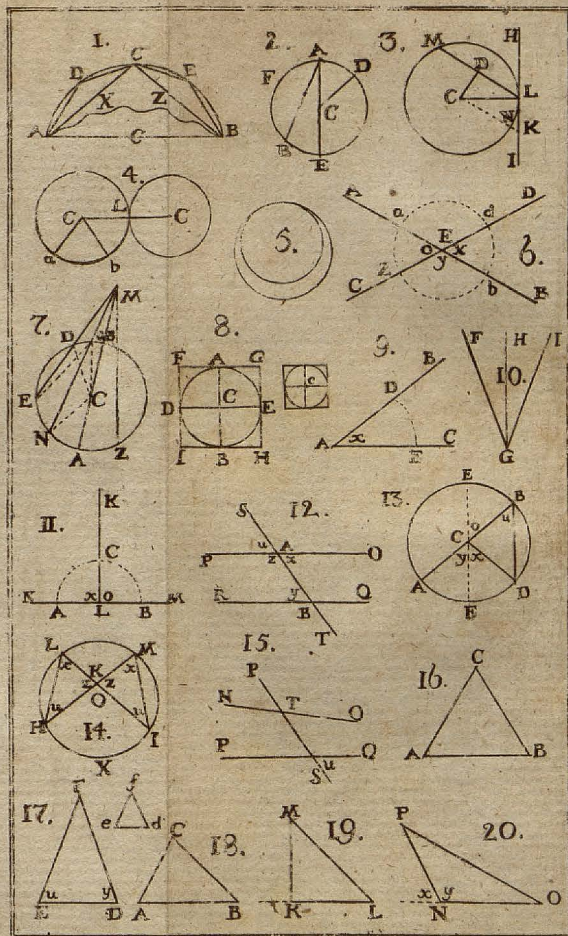
Finis Trigonometriæ Planæ
D. O. M. G.



Pagina	ERRATA GEOM: Linea	CORRIGE Lege
3.	14. Limea	Linea
6.	12. Exfordienſi	oxfordienſi
12.	23. poſitus AGC	poſitus AEC
20.	21. baſi KE	baſi KL
29.	11. ſemicir: dazb	ſemicirc: daz
42.	24. (§. 86.)	(§. 68.)
44.	8. (§. 57. *Ar:*)	(§. 75. *Ar:*)
47.	21. (§. 178.)	(§. 173.)
52.	23. (§. 27.)	(§. 127.)
55.	6. (§. 59.)	(§. 159.)
67.	1. ſimul ſumptis	ſimul ſumpti
91.	13 $= \frac{bd}{a+b}$	$= \frac{bd}{a-b}$
108.	17. IB+IC>GI+IB	IB+IC>GI+IC
121.	2. PAPIUS	PAPPUS
124.	23. Ducan: AD & DB	Ducantur AB & DB
147.	20. quadratulum	quadruplum
150.	22. tricæ, æquæ	tricæ, quæ
151.	27. $24^{v}, 5 \;\&\; 2^{\circ} 4^{\prime}$	$24^{\circ} 5^{\prime} \;\&\; 2^{\circ} 4^{\prime}$
153.	10. ponuntur $8^{\prime\prime\prime\prime}$	ponuntur $8^{\prime\prime\prime}$
161.	4. ſi dimidium ſumatur	ſi duplum ſum: baſis v. altitudinis parallelog:
172.	20. 4 : 1.+ erunt	4 : 1, erunt
190.	18. diameter $56^{\prime\prime}$	diameter $56^{\prime}$
	19. $= 56^{\prime\prime}$ *per*: $175^{\circ}8^{\prime}4^{\prime\prime}$	$= 56^{\prime}$ *per*: $17^{\circ}5^{\prime}8^{\prime\prime}4^{\prime\prime\prime}$
	20. $\frac{1}{4}$ diam: $= 14^{\prime\prime}$	$\frac{1}{4}$ diam: $= 14^{\prime}$

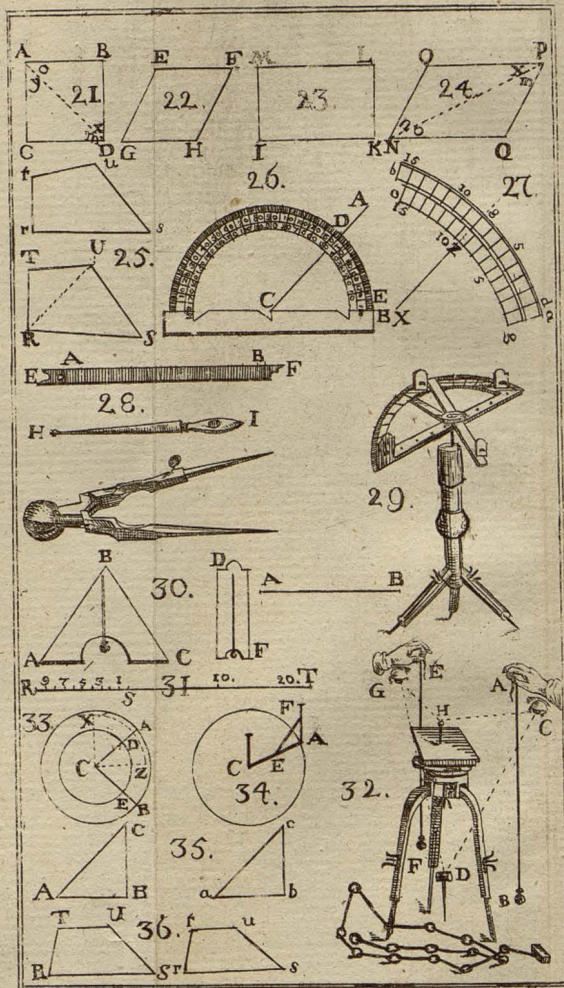
Pagina	ERRATA GEOM:	CORRIGE
	26. *Periph:* $\overset{\circ\,\prime\,\prime\prime}{17584}$	*Periph:* $\overset{\circ\,\prime\,\prime\prime\,\prime\prime\prime}{1758\ 4}$
191.	23. diam: $56^{\prime\prime}$	diam: $560^{\prime\prime}$
	24. ejus $3136^{\prime\prime}$	ejus $313600^{\prime\prime}$
192.	1. 1000: $3136^{\prime\prime}$	1000: $313600^{\prime\prime}$
194.	1. $18^{\circ}\ 84^{\prime}$	$18^{\prime}\ 84^{\prime\prime}$
250.	16. EC = CF	EC = EF
263.	20. capit $\frac{1}{10}$	capit $1\ \frac{1}{10}$
271.	23. *per hypotheſes*	*per hypotheſim*
272.	15. & globi S	& globi s
	17. globus S	globus s
277.	27. (§. 163. *Arit:*)	(§. 159. *Arith:*)
285.	9. Tab: Trig: f. 2.	Tab: Trig: f. 1.



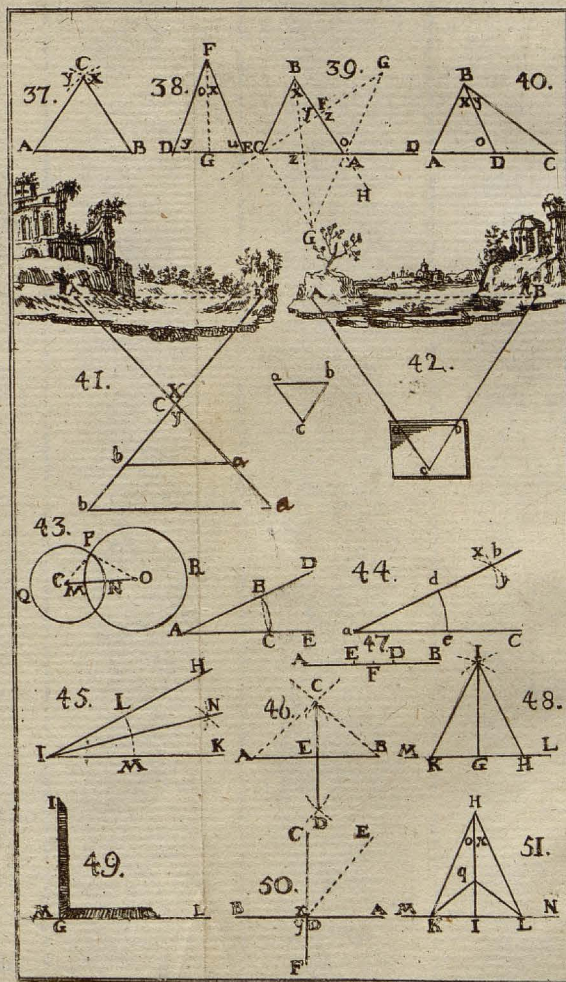


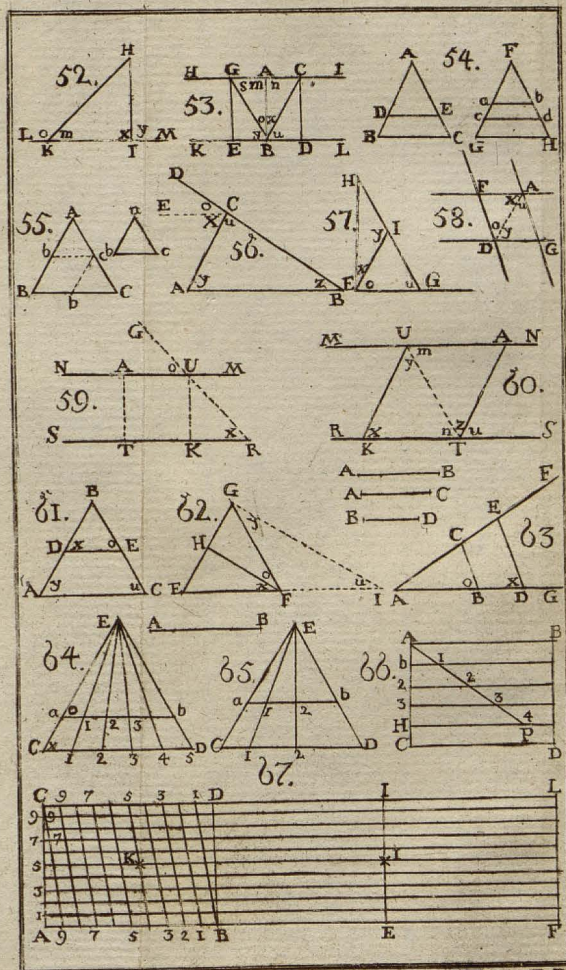
Ig. de Eggenfelder sec. Villnæ.

Geom. Tab. I.

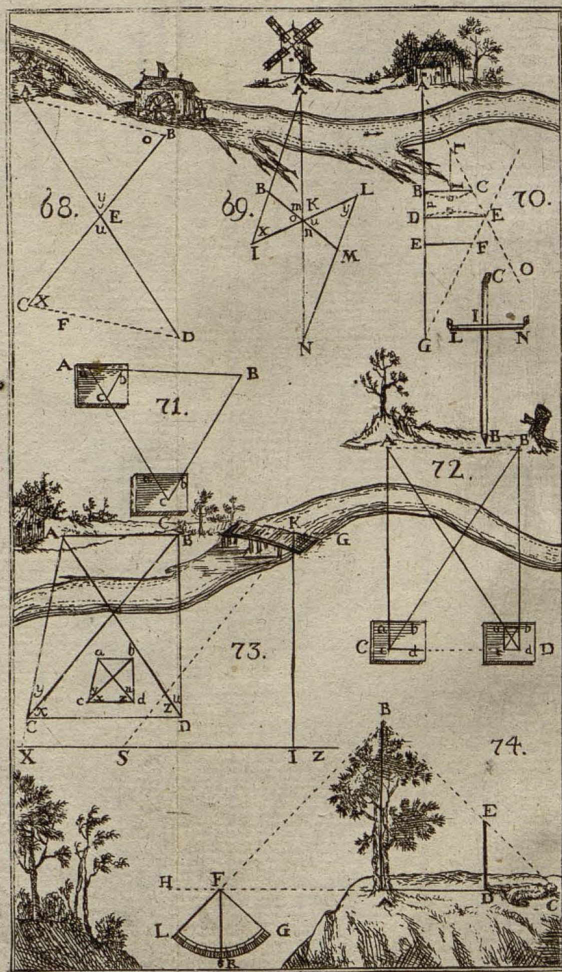


Geom. Tab. II.

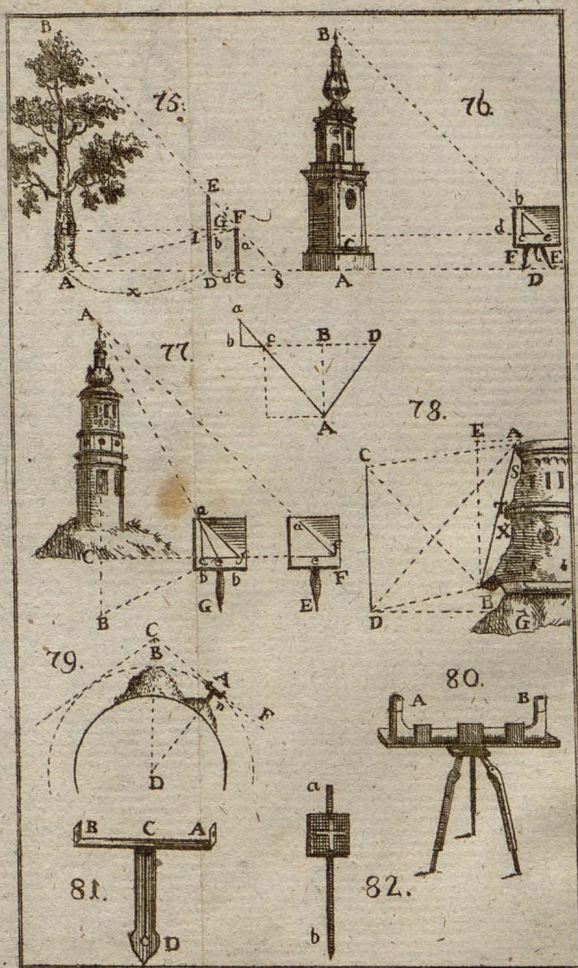

37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
Geom. Tab. III.



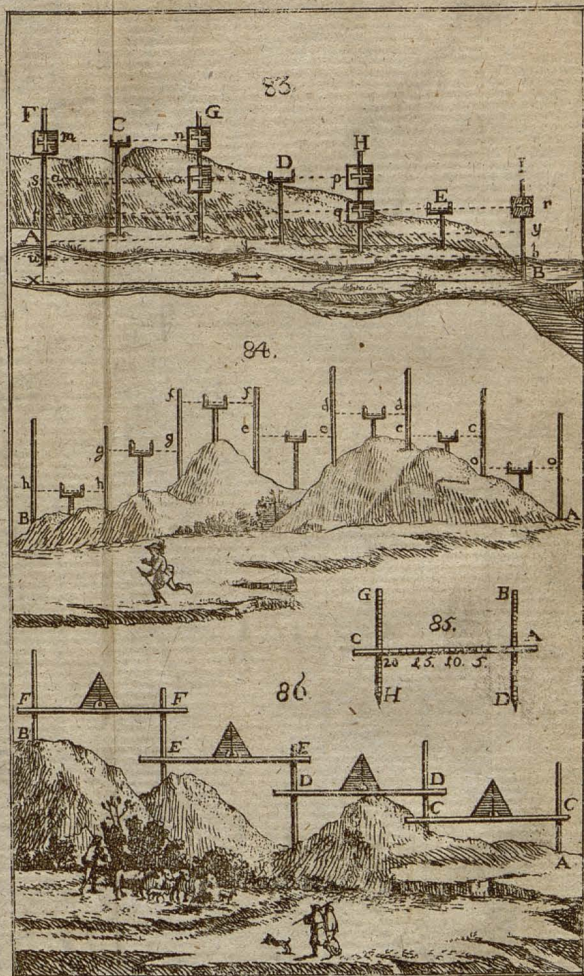
Geom.Tab.IV.



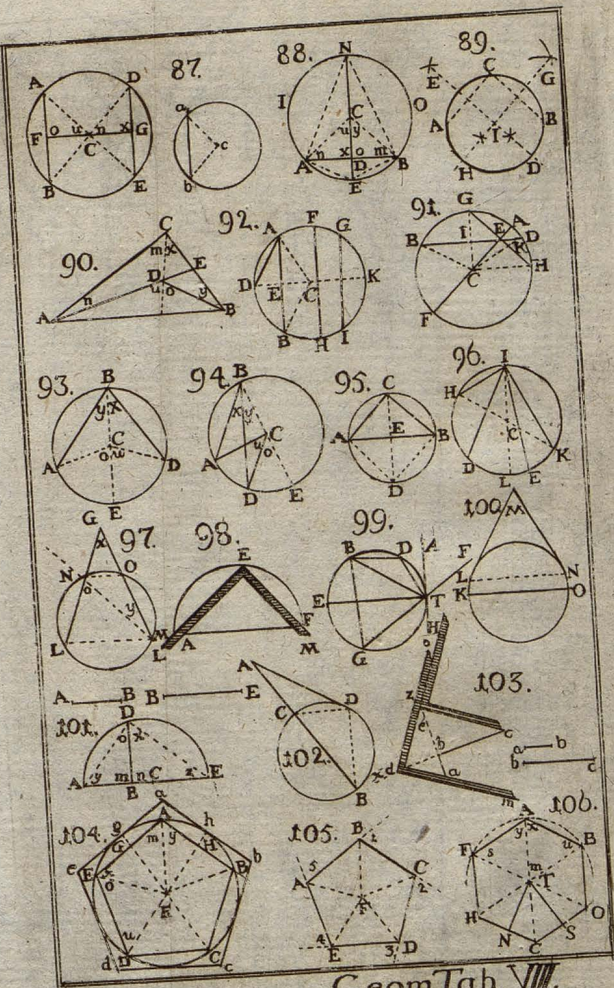
Geom. Tab.V.

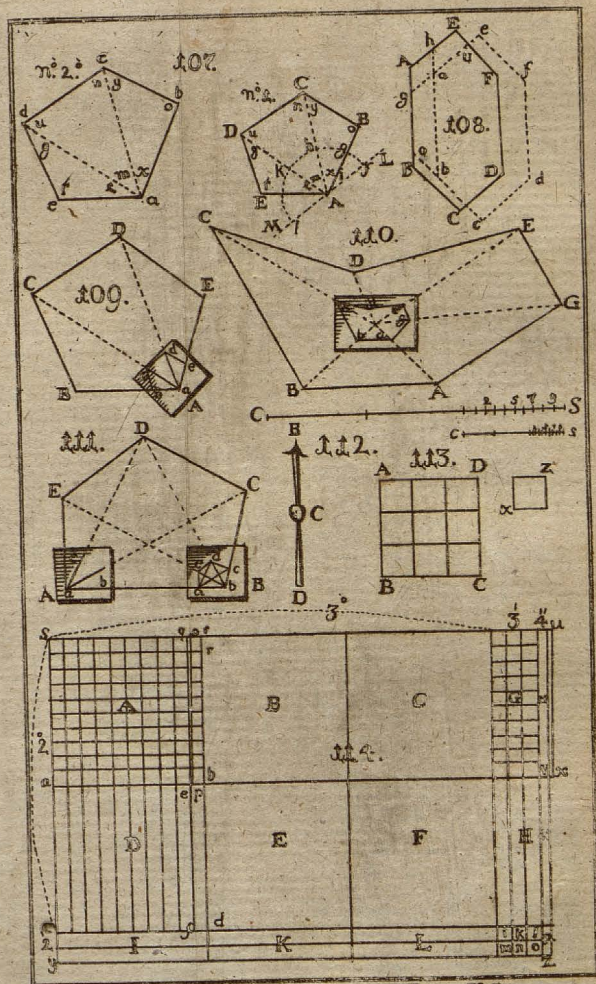

75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
Geom. Tab. VI.



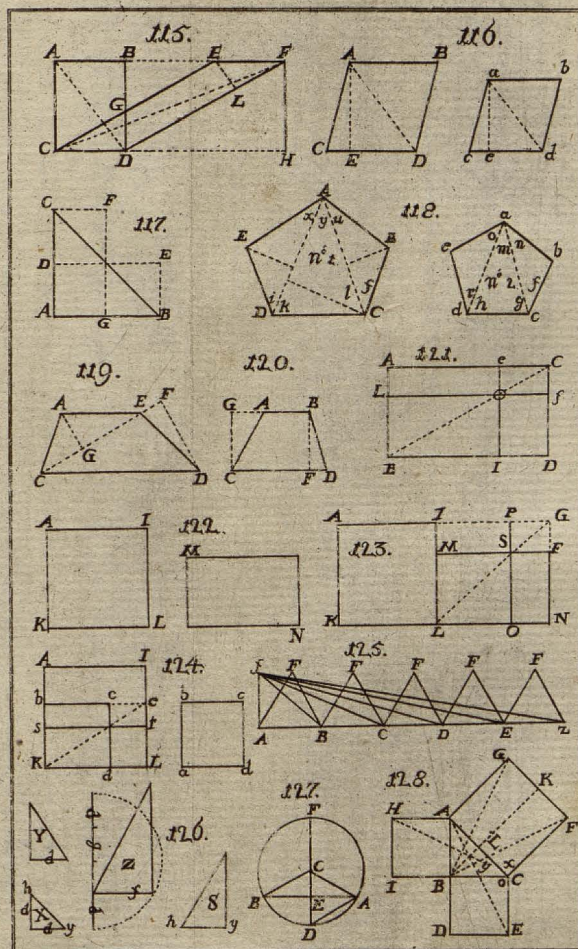


Ig. de Eggenfelder. fec. Viñæ. Geom. Tab. VII.


Geom. Tab. VIII.



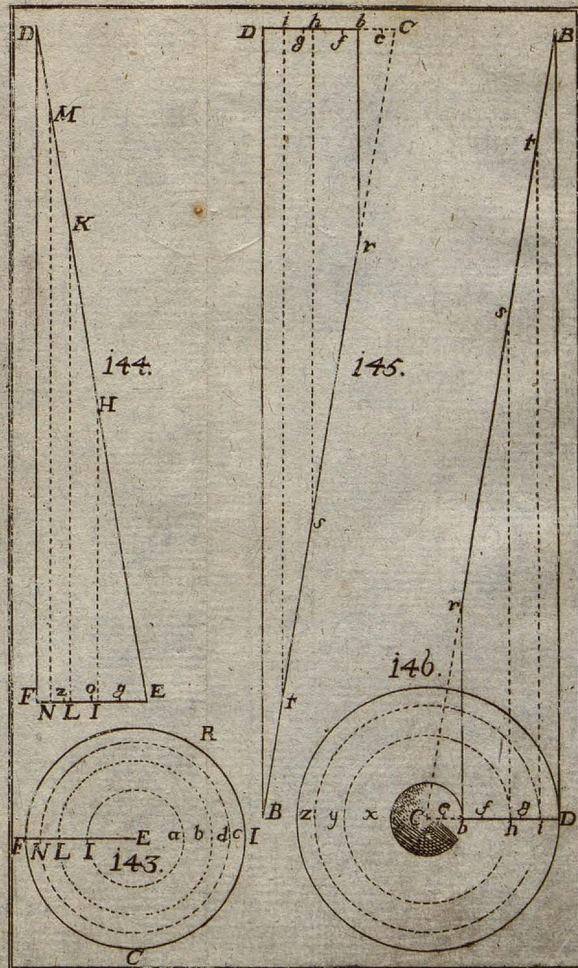
Geom. Tab. IX.



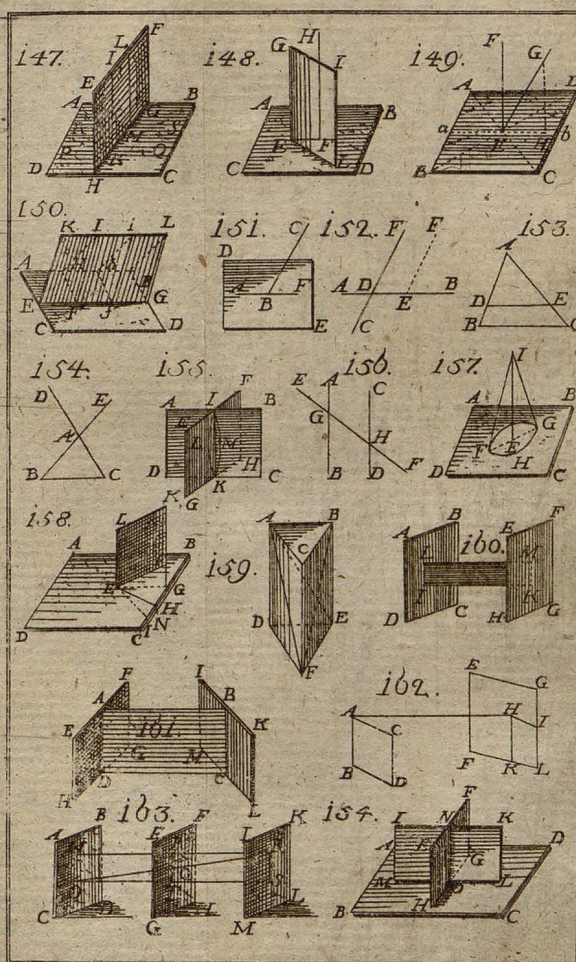
Jg. de Egge. fec. Viennæ.

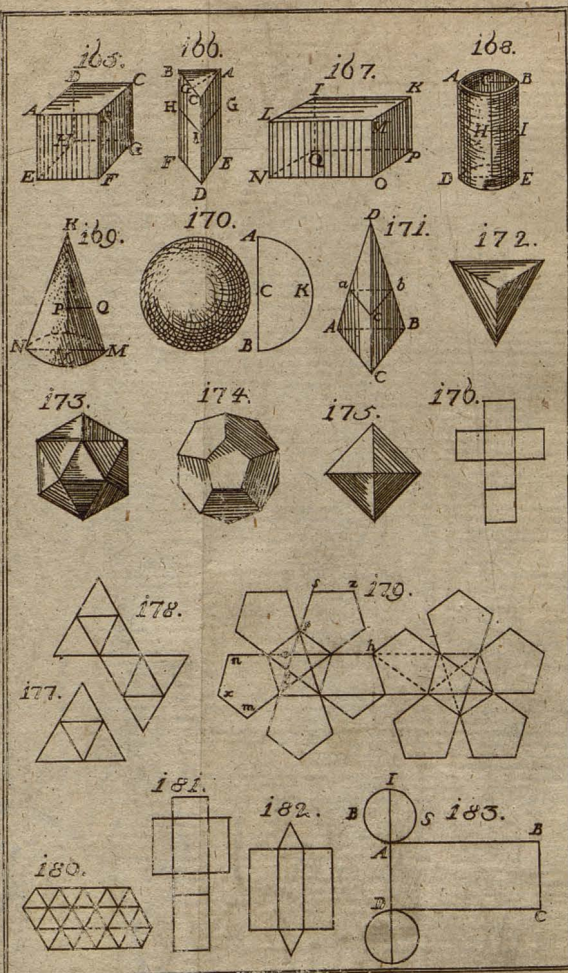
Geom. Tab. X.

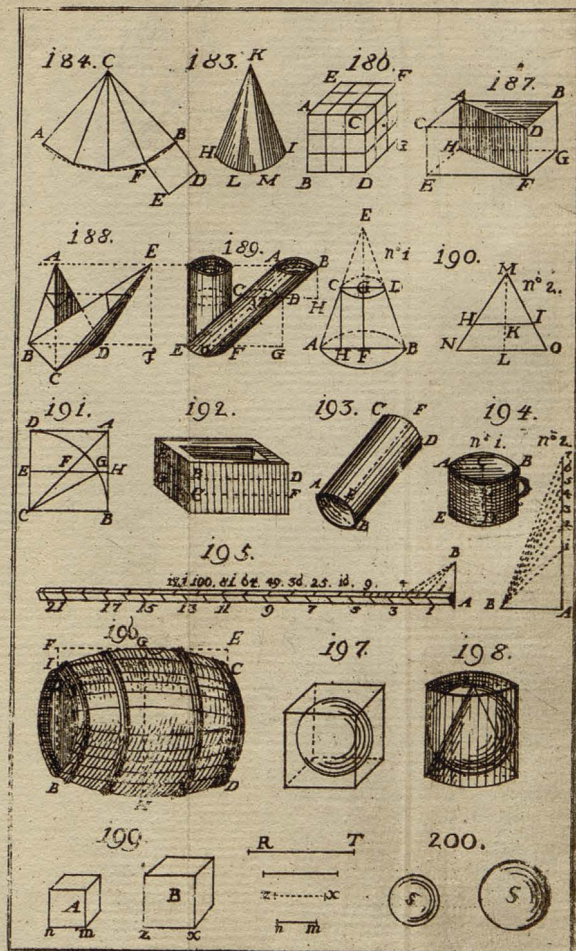
Geom. Tab. XI.



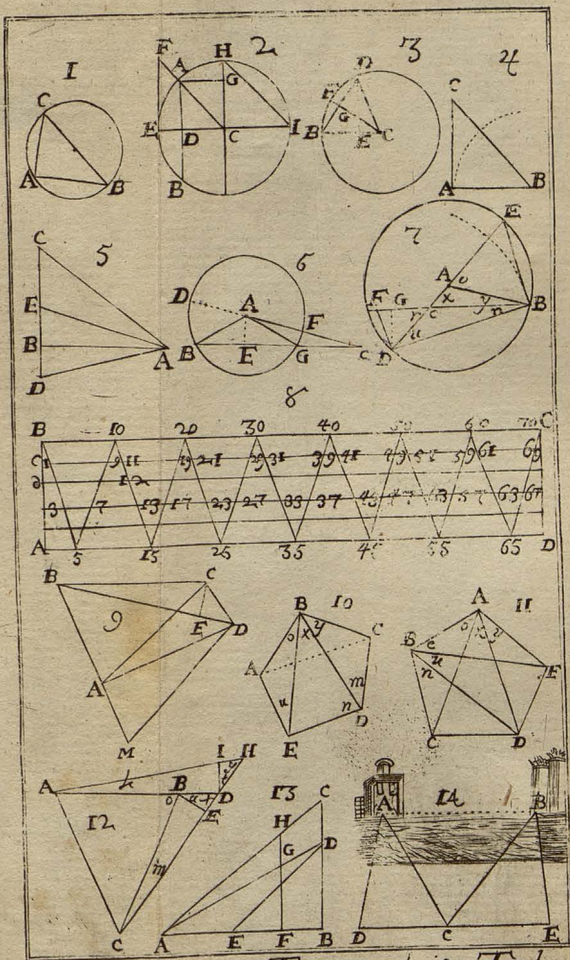
Geom. Tab. XII.


Geom. Tab. XIII.


165.
D
C
A
H
E
F
G
166.
B
A
G
H
C
I
F
E
D
167.
I
K
L
M
N
Q
O
P
168.
A
B
H
I
D
E
169.
K
P
Q
N
M
170.
A
C
K
B
171.
D
a
b
A
B
C
172.
173.
174.
175.
176.
178.
177.
179.
f
z
h
n
x
m
181.
182.
183.
I
B
S
B
A
D
C
180.
Geom. Tab. XIV.

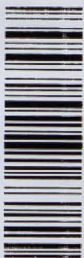

184.
185.
186.
187.
188.
189.
190.
n° 1
n° 2.
191.
192.
193.
194.
195.
196.
197.
198.
199.
200.

Geom. Tab. XV.



Trigonometriæ Tab.




Biblioteka Jagiellońska
stdr0027074

